

UMR 7619



Structure et Fonctionnement des Systèmes Hydriques Continentaux

Université P. & M. Curie

Case 105 – Tour 46/56 – 3^{ème} étage

4, place Jussieu – 75252 Paris Cedex 05

Tél. : 01 44 27 – Fax : 01 44 27

Cours d'Hydrogéologie

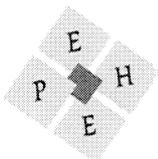
G. de Marsily

Université Paris VI

Septembre 2004

Ce document est établi à partir des ouvrages suivants :

- Hydrogéologie Quantitative, G. de Marsily, Masson, Paris 1981 (épuisé)
- Quantitative Hydrogeology, Groundwater Hydrology for Engineers, G. de Marsily, Academic Press, New-York, 1986, épuisé, disponible sur Amason.com d'occasion



INTRODUCTION

Cet ouvrage est une version revue et augmentée d'un premier livre, "Hydrogéologie Quantitative", paru chez Masson en 1981.

C'est un livre d'enseignement, mais aussi un livre de base pour le praticien qui souhaite retrouver certaines expressions classiques, certaines valeurs usuelles de paramètres, ou aborder certains phénomènes un peu inusuels du domaine.

L'accent est mis sur l'estimation: l'hydrogéologie est une discipline où tout se produit, par définition, à l'abri du regard, dans les anfractuosités du milieu souterrain. Ce que l'on demande à l'hydrogéologue, c'est donc d'abord d'expliquer ce qui se passe dans le sous-sol, puis d'en déduire une estimation d'une ou plusieurs grandeurs intéressant le citoyen ou le scientifique: une réserve, une hauteur d'eau, une concentration, un temps de transfert, par exemple.

Cette estimation sera basée en général sur une description de la géométrie des corps solides souterrains par où transite l'écoulement, suivie d'une caractérisation directe ou indirecte des propriétés de ces corps, le plus souvent à partir d'essais locaux, et complétée enfin par un calcul prédictif.

Ces trois étapes ne peuvent en général être totalement dissociées et allient des connaissances dérivant de la géologie, dans bon nombre de ses composantes (sédimentologie, stratigraphie, tectonique, géochimie, géophysique) et de l'hydraulique.

Une part importante de l'ouvrage s'adresse au problème de l'hétérogénéité des milieux souterrains, et propose, pour la quantifier, l'emploi des approches stochastiques. Le principal avantage de ces méthodes est de pouvoir associer à l'estimation proposée une mesure de son incertitude, et donc de mettre en garde l'utilisateur des résultats sur l'apparente précision d'une prédiction quand elle n'est accompagnée d'aucune fourchette d'incertitude.

Par ailleurs, les problèmes du transport des éléments solubles ou en phase séparée non miscible, qui revêt une importance qui va croissant du fait de la lente contamination de l'environnement par les activités humaines, occupe une large place dans cet ouvrage.

Une large part de l'ouvrage est issue du travail de mes collaborateurs, collègues et thésards, à l'Université Paris VI et à l'Ecole des Mines de Paris: qu'ils en soient ici remerciés.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES NOTATIONS

INTRODUCTION

CHAPITRE 1: LE CYCLE DE L'EAU	1
1.1. Humidification et infiltration	1
1.2. Ruissellement de surface	2
1.3. Evaporation	3
1.3.1. Estimation	5
1.3.2. Mesure	5
1.4. Cas de la neige	7
1.5. Schématisation du cycle de l'eau	7
1.6. Les différentes branches de l'hydrologie	7
1.7. Autres origines possibles des eaux souterraines	9
CHAPITRE 2: POROSITE DES ROCHES ET RELATIONS FLUIDE-SOLIDE EN MILIEU POREUX	11
2.1. Porosité totale	11
a) Roches grenues	11
b) Roches fissurées	11
c) Définition	12
d) Volume élémentaire représentatif ou Fonctions Aléatoires définition des propriétés locales d'un milieu poreux	12
e) Porosité et granulométrie	16
f) Porosité de surface	17
g) Surface spécifique	17
2.2. Relations fluides-solides dans les milieux poreux	17
2.2.1. Milieux saturés en eau	17
2.2.2. Milieux non saturés	21
2.3. Mesures de la porosité	27
a) Méthodes directes sur échantillons	27
b) Méthodes indirectes in situ	27
c) Quelques valeurs de porosité	28
2.4. Mesure de la pression de l'eau dans le sol	29
a) Dans la partie saturée	29
b) Dans la partie non saturée	30
CHAPITRE 3: NOTIONS DE BASE EN HYDRAULIQUE	32
3.1. Equations générales de la mécanique des fluides	32

3.2. Equation de continuité en milieu poreux	33
3.2.1. Vitesse de filtration moyenne et équation de continuité macroscopique	33
3.2.2. Simplification des notations: terme source	39
3.2.3. Vitesse microscopique moyenne	40
3.3. Charge hydraulique et cote piézométrique	40
3.4. Simplification et intégration des équations de Navier-Stokes en milieu poreux schématique ..	41
a) Mouvement parallèle isotherme et permanent d'un fluide visqueux incompressible dans une fissure d'épaisseur e , sans action des forces extérieures	42
b) Ecoulement dans un tube circulaire de rayon r	43
c) Introduction des forces extérieures	44
 CHAPITRE 4: LOI DE DARCY	
4.1. L'expérience de Darcy, perméabilité et transmissivité	46
a) Perméabilité intrinsèque	46
b) Perméabilité des hydrogéologues	47
c) Perméabilité et porosité	48
d) Tenseur de perméabilité	49
e) Milieu fissuré	51
f) Transmissivité	56
4.2. Limite de validité de la loi de Darcy	57
a) Du côté des faibles valeurs du gradient hydraulique	57
b) Du côté des fortes valeurs du gradient hydraulique	57
c) Loi de Darcy en régime transitoire	58
4.3. Mesures de la perméabilité sur échantillon	58
a) Milieux à forte perméabilité	58
b) Milieux à faible perméabilité	59
c) Valeurs de la perméabilité	60
4.4. Approche probabiliste de la perméabilité et variabilité spatiale	60
4.5. Mouvements de l'eau sous l'action d'autres champs de force	63
 CHAPITRE 5: INTEGRATION DES EQUATIONS ELEMENTAIRES. L'EQUATION DE DIFFUSIVITE	
LA CONSOLIDATION	65
5.1. Equation de diffusivité en nappe libre	66
a) Flux massique	67
b) Variation de masse de l'élément	67
c) Débit volumique de fluide prélevé	67
d) Bilan	68
5.2. Théorie de la consolidation de Terzaghi. Action de l'eau intersticielle sur les milieux poreux	69
a) Contraintes effectives et pression neutre	69
b) Soulèvement hydrostatique	70
c) Pressions de courant ou poussée d'écoulement	70
d) Théorie de la consolidation suivant Terzaghi	71
Contrainte effective en milieu non saturé	74
5.3. Equation de diffusivité générale: cas de la nappe captive	75
a) L'équation de continuité du fluide	75
a) L'équation de continuité du flux de grains solides	75
c) La loi de Darcy	76
d) Combinons l'équation de continuité (3.2.3) avec (5.3.1) et (5.32)	76
e) Les équations d'état du liquide et du solide	77

f) Synthèse: l'équation de diffusivité. Simplifications	81
5.4. Cas des sols très compressibles	83
5.5. Autres équations de diffusivité	84
CHAPITRE 6: LES SYSTEMES AQUIFERES	85
6.1. Types de nappes	85
6.1.1. Nappes libres	85
6.1.2. Nappes captives	90
6.1.3. Milieux peu perméables	91
6.1.4. Types de nappes en fonction de la géologie	92
6.2. Réserves de nappes	98
a) Nappes libres	98
b) Nappes captives	99
6.3. Conditions aux limites et conditions initiales usuelles	101
a) Limites à potentiel imposé	101
b) Limites à flux imposé	102
c) Conditions de Fourier	103
d) Surface libre	104
e) Surface de suintement	105
f) Absence de conditions aux limites	105
g) Conditions initiales	106
CHAPITRE 7: SOLUTIONS EN REGIME PERMANENT DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE	108
7.1. Propriétés générales de l'équation de diffusivité	107
a) Unicité de la solution	107
b) Principe de la superposition	107
c) Anisotropie	109
7.2. Ecoulement parallèle: première solution en régime permanent	110
7.3. Solutions à deux dimensions en écoulement radial	110
a) Solution élémentaire de Dupuit	110
b) Puits dans une nappe libre	112
c) Principe des images	113
d) Ligne de puits	115
e) Courbe caractéristique d'un forage	116
7.4. Solution élémentaire en coordonnées sphériques	118
7.5. Potentiel complexe à deux dimensions	118
CHAPITRE 8: SOLUTIONS TRANSITOIRES DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE	
ESSAIS DE DEBIT	120
8.1. Solutions élémentaires en coordonnées radiales	120
8.1.1. Solution de Theis	121
8.1.2. Approximation logarithmique de Jacob	122
8.1.3. Relation avec le régime permanent	123
8.1.4. Application du principe de superposition	124
8.2. Interprétation d'un essai de débit	125
a) Méthode de Jacob	125
b) Interprétation par le méthode de Theis complète par la méthode d'identification	127
c) Interprétation des courbes de remontée	129
8.3. Drainance	129
8.3.1. Intégration de l'équation de diffusivité en tenant compte des épontes	129

8.3.2. Solutions analytiques radiales du problème de la drainance	132
8.4. Corrections particulières à apporter à un essai de débit	135
a) Effet de capacité du puits	135
b) Essais artésiens	136
c) Nappe libre, aquifère anisotrope, puits incomplets, tenant compte du retard dans le drainage gravitaire de la zone non saturée	139
d) Variation du débit au cours de l'essai	140
8.5. Autres solutions (à une dimension) de l'équation de diffusivité	143
a) Massif semi-infini, variation brusque de charge	143
b) Massif limité, variation brusque de charge	145
8.6. Mesures ponctuelles de perméabilité in situ	146
a) Essais de poche ou essais Lefranc	146
b) Essais Lugeon en roches fissurées	147
c) Essais par chocs hydrauliques	147
CHAPITRE 9: TRANSPORT DE MASSE ET D'ENERGIE EN MILIEU POREUX	151
9.1. Ecoulements polyphasiques (fluides non miscibles)	151
9.1.1. Théorie	151
9.1.2. Cas particulier: écoulement en milieu non saturé	153
9.1.3. Mouvements d'interface de séparation	154
9.1.4. Cas particulier: interface eau douce-eau salée	155
9.1.5. Problèmes de pollutions polyphasiques	157
9.2. Ecoulements de fluides miscibles	158
9.2.1. Lois du transport en solution des éléments conservatifs	158
9.2.2. Lois des interactions en phase immobile et éléments transportés et modifications physico-chimiques des éléments	171
9.2.3. Solutions analytiques de l'équation de la dispersion	178
9.3. Transferts de chaleur en milieu poreux	180
CHAPITRE 10: SOLUTIONS NUMERIQUES DES EQUATIONS D'ECOULEMENT ET DE TRANSPORT	185
10.1. Choix d'une technique numérique et d'un code	185
10.2. Différences finies	187
10.2.1. Approximation des dérivées par différences	189
10.2.2. L'équation de bilan de masse	190
10.2.3. Différences finies intégrées	191
10.2.4. Différences finies intégrées: cas particuliers	193
10.2.5. Estimation des transmissivités moyennes	196
10.2.6. Différences finies en régime transitoire	198
10.2.7. Problème non linéaire	201
10.2.8. Systèmes multicouches	202
10.2.9. Systèmes à trois dimensions	204
10.2.10. Comment représenter les rivières	205
10.2.11. Estimation de l'alimentation régionale	205
10.2.12. Représentation des puits	206
10.3 Finite elements	207
10.3.1. Eléments finis linéaires sur des triangles	207
10.3.2. Eléments finis linéaires isoparamétriques avec l'approximation de Galerkin	211
10.3.3. Eléments d'ordre supérieur	215
ANNEXE 1: FORMULES PERMETTANT D'ESTIMER L'EVAPOTRANSPIRATION POTENTIELLE	216
ANNEXE 2: GRANDEURS USUELLES, VALEURS ET UNITES	220

LISTE DES NOTATIONS

B	facteur de drainance de Hantush
C	concentration d'un corps dissous dans la phase liquide
\overline{D}	tenseur de dispersion en milieu poreux
d_o	coefficient de diffusion moléculaire
E	module d'Young (théorie de l'élasticité)
e	épaisseur d'une nappe
erf	fonction d'erreur
erfc	1-erf
g	accélération de la pesanteur
h	hauteur piézométrique
K	perméabilité des hydrogéologues, $[LT^{-1}]$
k	perméabilité intrinsèque, $[L^2]$
$\overline{K}, \overline{k}$	tenseurs de perméabilité
K_d, K_a	coefficients de distribution en milieu poreux ou fissuré - cf. § 9.2.2.
ℓ	élément de longueur
log	logarithme népérien
\log_{10}	logarithmes décimaux
p	pression
q	débit prélevé dans un milieu poreux
Q	débit d'un forage
r	distance au forage
Re	nombre de Reynolds
R_r	rugosité relative de fissure
s	rabattement
S	coefficient d'emmagasinement d'une nappe
S_s	coefficient d'emmagasinement spécifique

t	temps
T	transmissivité
\vec{u}	vitesse microscopique en milieu poreux
\vec{U}	vitesse de Darcy
\vec{u}^*	vitesse microscopique moyenne en milieu poreux, $\vec{u}^* = \frac{\vec{U}}{\omega_c}$
u	$\frac{T_i}{Sr^2} =$ temps réduit (variable de Theis)
V	volume
W	fonction de Theis
$\vec{\text{grad}}$	gradient: $\vec{\text{grad}} a$ est un vecteur de composantes $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}$, a étant un scalaire
div	divergent: $\text{div } \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$; c 'est un scalaire, \vec{U} étant un vecteur, U_x, U_y, U_z étant les composantes de \vec{U}
α	coefficient de compressibilité spécifique du milieu poreux
α_L, α_T	dispersivité, ou coefficient de dispersion intrinsèque, longitudinale et transversale
∇^2	laplacien: $\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$; c 'est un scalaire, h étant un scalaire
β_l	coefficient de compressibilité de l'eau
β_s	coefficient de compressibilité des grains solides formant le milieu poreux
θ	teneur en eau d'un sol non saturé $\theta = \frac{\text{volume d'eau contenue}}{\text{volume total}}$ (parfois la température, mais alors c'est indiqué)
$\bar{\lambda}$	tenseur de conductivité thermique équivalente en milieu poreux
λ_o	conductivité thermique du milieu poreux immobile
μ	viscosité dynamique de l'eau
ν	coefficient de Poisson (théorie de l'élasticité) ou viscosité cinématique $\frac{\mu}{\rho}$
ρ	masse volumique de l'eau
ρ_a	masse volumique apparente (ou déjaugée) du terrain saturé
ρ_s	masse volumique des grains du terrain
ρ_d	masse volumique du terrain sec, $\rho_d = \rho_s(1 - \omega)$
ρ_w	masse volumique du terrain saturé en eau, $\rho_w = \rho_s(1 - \omega) + \rho_w$
σ	contrainte totale } au sens de Terzaghi
$\bar{\sigma}$	
Σ	signe de sommation, ou surface extérieure d'un volume de milieu poreux
ψ	succion dans le sol non saturé
ω	porosité totale d'un milieu poreux
ω_c	porosité cinématique (ou efficace) d'un milieu poreux (eau mobile)
ω_d	porosité de drainage d'une nappe libre (eau récupérable par drainage sanitaire)
ζ	coefficient de viscosité de volume
$\langle \rangle$	moyenne spatiale d'une propriété définie à l'échelle microscopique en milieu poreux

Chapitre 1

LE CYCLE DE L'EAU

- 1.1. Humidification et infiltration
- 1.2. Ruissellement de surface
- 1.3. Evaporation
 - 1.3.1. Estimation
 - 1.3.2. Mesure

- 1.4. Cas de la neige
- 1.5. Schématisation du cycle de l'eau
- 1.6. Différentes branches de l'hydrologie
- 1.7. Autres origines possibles des eaux souterraines

Les précipitations (pluies et neiges) arrivant à la surface de la terre constituent la quasi-totalité des apports d'eau au sol. Nous étudierons séparément le cas de la pluie et de la neige, puis regarderons les autres types d'apports.

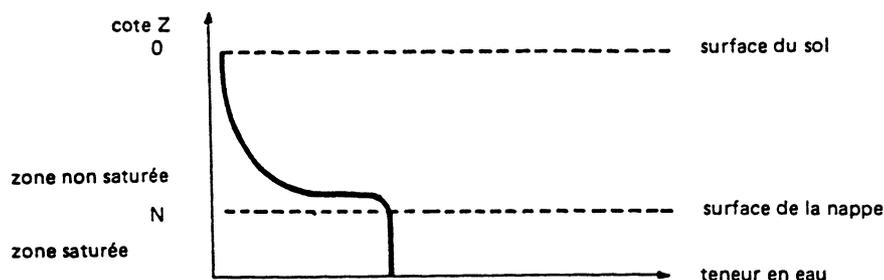
Quand une pluie arrive au sol, trois processus prennent naissance:

- l'humidification du sol et l'infiltration,
- le ruissellement de surface,
- l'évaporation.

Nous regarderons comment on peut tenter d'estimer ces différents flux.

1.1. HUMIDIFICATION ET INFILTRATION

Dans la quasi-totalité des pays où il pleut, le sous-sol renferme en temps normal de l'eau. Un profil habituel de la quantité d'eau contenue en fonction de la cote se présente de la façon suivante:

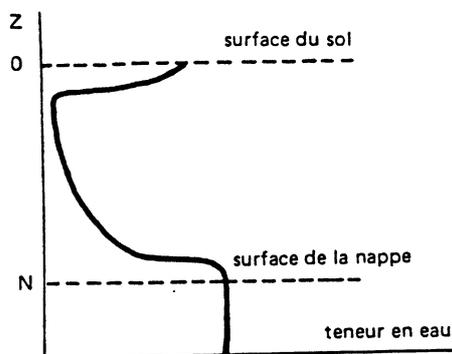


Cette teneur en eau est, bien sûr, fonction de la porosité et de la perméabilité du sol. En dessous d'une certaine cote, N, la teneur en eau n'augmente plus avec la profondeur. Le sol est dit saturé, tous les vides (les pores) du sol contiennent de l'eau. Cette eau est dite appartenir à la nappe phréatique. Nous définirons plus précisément le terme au Chap. 6.

En revanche, au-dessus de la cote N, le sol est dit non saturé, les vides du sol contiennent simultanément de l'eau et de l'air. Nous étudierons au Chap. 2 suivant quelle relation.

Disons seulement que l'eau est soumise essentiellement aux forces de gravité dans la zone saturée et, en plus, aux forces de capillarité (qui deviennent très vite prépondérantes) dans la zone non saturée.

L'eau qui tombe à la surface du sol commence par humidifier la fraction supérieure du sol (quelques centimètres). Le profil est alors le suivant:



Cette augmentation d'humidité en surface n'entraîne pas nécessairement un écoulement vertical immédiat: tant que les forces de capillarité sont supérieures aux forces de gravité, l'eau est retenue, comme dans une éponge, et ne migre vers le bas que très lentement.

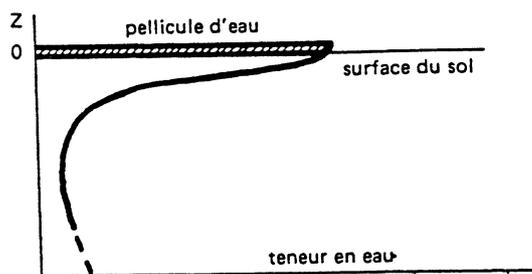
Quand la teneur en eau dépasse une valeur limite, appelée capacité de rétention spécifique, l'eau se propage plus rapidement vers le bas et humidifie une zone plus profonde du sol.

Si la pluie se poursuit suffisamment longtemps, l'humidification sera de plus en plus importante et entraînera une infiltration, c'est-à-dire une arrivée d'eau à la nappe. Mais ce phénomène est très lent: suivant la profondeur de la nappe sous le sol et la perméabilité de celui-ci, l'arrivée d'eau à la nappe peut se produire dans la semaine qui suit la pluie, dans le mois, ou même dans les six mois.

En zone tempérée, une grossière estimation moyenne de la lame d'eau infiltrée jusqu'à la nappe est d'environ 300 mm/an, soit 10 $\ell/s.km^2$.

1.2. RUISSELLEMENT DE SURFACE

Si l'intensité de la pluie est forte, le sol ne peut ingurgiter l'apport d'eau: passés les premiers instants et l'humidification de la zone tout à fait supérieure du sol, un excès d'eau apparaît en surface:



La tranche supérieure du sol est saturée sur une faible épaisseur, mais cette humidité ne se propage pas assez vite pour absorber toute l'eau qui tombe.

Sur certains sols nus, pauvres en matières organiques, ce phénomène est renforcé par l'apparition d'une "croûte de battance", qui est un colmatage d'une fine pellicule superficielle du sol due à l'impact des gouttes de pluie qui arrachent de fines particules solides et les redistribuent dans les pores du sol, diminuant ainsi très fortement l'infiltrabilité.

Une pellicule d'eau de surface peut alors circuler sur le sol, c'est ce que l'on appelle le ruissellement. On distingue même, un peu artificiellement, un ruissellement pur en surface et un "écoulement hypodermique", qui se fait dans les premiers centimètres du sol ou de la végétation.

Ce ruissellement circule suivant la ligne de plus grande pente du sol et vient alimenter le réseau de drainage naturel: fossés, ruisseaux, rivières, etc... Il entraîne des particules solides par érosion, ce qui génère le transport solide des rivières.

Maintenant, si la surface du sol est totalement imperméable (zone urbaine ou roche de surface imperméable, par exemple, roche compacte non fissurée bien que cela soit rare, ou encore zone gelée), le ruissellement apparaît presque instantanément après que l'eau ait comblé les premières aspérités du sol (flaques, etc...).

Dans les bas-fonds des vallées humides, il peut aussi arriver que le sol soit saturé jusqu'à la surface: la surface de la nappe phréatique affleure et un suintement d'eau s'effectue vers la rivière centrale. Dans ce cas, la pluie ne peut pas non plus s'infiltrer et alimente directement le ruissellement. Si l'emprise au sol de cette zone où la nappe phréatique affleure varie au cours de l'année avec le régime des précipitations, on parle d'aire contributive au ruissellement variable. Voir par exemple Beven et al. (1985).

Notons enfin que la végétation constitue encore un premier écran aux mécanismes cités plus haut: le début de la pluie est intercepté par les arbres, les herbes, ce qui peut empêcher une faible pluie de commencer tout mécanisme d'humidification. En revanche, la végétation empêche le développement d'une croûte de battance, et protège le sol contre l'érosion.

1.3. EVAPORATION

Même pendant la pluie, une partie non négligeable de l'eau arrivée au sol est immédiatement rééaporée. En effet, l'humidité de l'atmosphère est rarement saturée, même pendant un orage.

Une fois la pluie arrêtée, cette évaporation continue et assèche peu à peu l'eau qui se trouve interceptée par la végétation, ou qui reste en surface. Elle continue, bien sûr, sur les surfaces d'eau libre (rivières, lacs) et à la surface du sol.

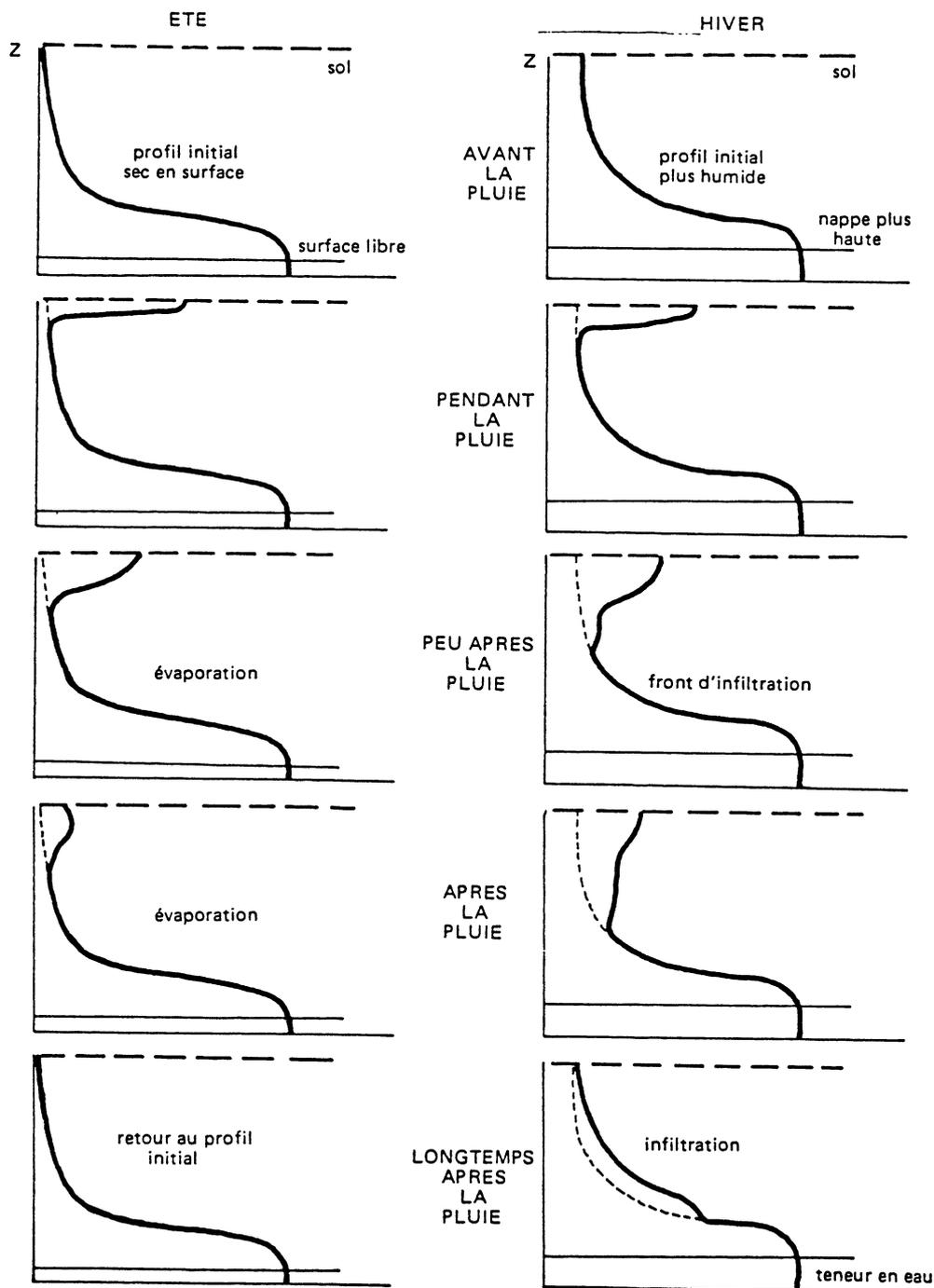
Dans le sol même, cette évaporation continue également. Du fait de l'existence d'une phase air dans la zone non saturée, cette évaporation pourrait avoir lieu simultanément sur la totalité du profil et même presque jusqu'à la nappe. Cependant, du fait de la lenteur des mécanismes d'extraction de cette humidité dans la phase air (diffusion vers la surface), c'est l'évaporation à la surface du sol qui est le phénomène dominant quand le sol n'est pas très desséché, en climat tempéré. L'eau du sol est comme "aspirée" et remonte vers la surface par capillarité pour y être évaporée.

La facilité pour l'atmosphère d'évaporer l'eau du sol diminue avec la teneur en eau de celui-ci: plus celle-ci est faible, plus l'eau est liée par capillarité au sol, et plus l'énergie à fournir pour l'en extraire est élevée. Elle est également fonction du pouvoir évaporant de l'atmosphère: température, vent, ensoleillement.

En été, quand cette évaporation est intense, elle reprend généralement la totalité de l'eau qui a humidifié le profil: il ne se produit pas d'infiltration à la nappe. La Pl.1 donne une succession de profils de teneur en eau caractéristiques dans un sol, en hiver et en été, mettant en évidence la différence de comportement.

On admet cependant que la reprise évaporatoire sur la nappe devient négligeable, même en pays tropical ou aride, quand celle-ci se trouve à plus de 10 ou 15 m sous la surface du sol.

En pays aride, sur sol nu, on a pu montrer que l'extraction de l'eau du sol et l'évaporation se font de la manière suivante: remontée de l'eau sous forme liquide par capillarité jusqu'à une profondeur de 1,5 m sous la surface environ; vaporisation de l'eau et changement de phase à cette profondeur; diffusion de l'eau-vapeur dans l'air du sol jusqu'à la surface et dans l'atmosphère. En utilisant des méthodes isotopiques, Fontes et al. (1986) ont pu ainsi estimer le flux évaporatoire au Sahara, à Beni-Aloès, à environ 5 mm/an, quand la nappe se situe à 10 m de profondeur sous le sol.



Pl.1 - Modification du profil d'humidité d'un sol après la pluie.

Un autre phénomène joue dans le même sens que l'évaporation sur le sol: c'est la transpiration des végétaux. Les racines des plantes sont capables de reprendre l'eau du sol dans la zone non saturée, ou parfois dans la zone saturée si elle proche.

1.3.1. Estimation

Cette transpiration réduit donc peu à peu la teneur en eau du profil. Au-dessous d'une certaine teneur en eau limite, les plantes ne sont plus capables d'extraire de l'eau du sol: c'est le point de flétrissement, qui varie d'une espèce à l'autre. On l'exprime généralement, non pas en teneur en eau, mais en succion ou tension en bars (voir plus loin l'étude de la zone non saturée, Chap.2).

On regroupe généralement évaporation et transpiration sous le terme "évapotranspiration", sans distinguer les deux phénomènes, et c'est ce terme que l'on tente, avec difficulté, d'estimer ou de mesurer. Il existe pour cela des formules empiriques qui sont basées sur des mesures climatologiques (température, ensoleillement, vitesse du vent, etc... - voir la référence Brochet et Gerbier, 1974). Nous donnons en Annexe 1, à titre d'exemple, les formules de Thornthwaite, de Turc, de Penman.

On estime ainsi une évapotranspiration potentielle mensuelle (notée ETP) représentant le pouvoir évaporant de l'atmosphère, qui serait celle que l'on observerait sur un sol avec couvert végétal, où l'eau serait disponible en abondance. Si l'eau vient à manquer, l'évapotranspiration réelle (notée ETR) est fonction de ETP et de la quantité d'eau disponible.

En première approximation, on imagine que la tranche supérieure du sol (le premier mètre, pour fixer les idées) constitue un réservoir, la Réserve Utile du sol (RU) dont on estime la capacité maximale (100 mm très généralement en climat tempéré, et jusqu'à 300 mm en pays aride: on appelle en général RFU (Réserve Facilement Utilisable) cette capacité maximale). Dans ce réservoir, l'évapotranspiration peut puiser sans restriction au taux potentiel ETP. Quand il est vide, seules les précipitations du mois donné peuvent alimenter l'évapotranspiration.

Quand il est plein, l'excédent de précipitation engendre l'infiltration vers la nappe. Pendant un mois donné, on fait le bilan de la pluie nette (en enlevant le ruissellement), d'ETP et du stock contenu dans RU, ce qui permet de calculer ETR et l'infiltration à la nappe.

Le tableau ci-dessous en donne un exemple, pour la région de Camlibel (Turquie) en utilisant la formule de Thornthwaite pour calculer ETP pour une année donnée:

	Jan	Fév	Mars	Avr	Mai	Juin	Juil	Août	Sept	Oct	Nov	Déc	Annuel
Temps moyen °C	6	8,2	13,1	18,3	23,1	27,6	29	29,9	26,7	21	14,7	8,7	18,9
ETP mm	5,2	9,6	30,8	65,8	118,3	171,5	189,5	190,6	133,2	75,4	31,4	10,5	1031,8
Pluie mm	49,9	38,1	48,7	47,9	58,3	38,1	8,7	5,7	17,6	28,4	36,4	51,1	428,9
RU mm	90	100	100	82,1	22,1	-	-	-	-	-	5	45,6	
Infilt. mm	-	18,5	17,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36,4
ETR mm	5,2	9,6	30,8	65,8	118,3	60,2	8,7	5,7	17,6	28,4	31,4	10,5	392,2

On peut donc estimer, en première approximation, l'infiltration à 37 mm/an, et l'évapotranspiration réelle à 392 mm/an.

1.3.2. Mesure

Il existe également des méthodes directes de mesure de l'évapotranspiration sur une parcelle de sol à partir de la mesure du bilan d'énergie du sol (flux radiatifs, convectifs et conductifs). On convertit en masse d'eau le terme de chaleur latente d'évaporation que donne le bilan. Voir en particulier Choisnel (1977). Mais

cette méthode est onéreuse et ne s'applique pour l'instant qu'à de très petites surfaces, de l'ordre du m². Il existe des projets d'en étendre le champ d'utilisation grâce à la télédétection. Voir Seguin (1980).

Une méthode plus traditionnelle de mesure est le lysimètre. Il s'agit d'un gros cylindre vertical (diamètre 1 à 2 m, hauteur 2 à 4 m pour fixer les idées) isolé à l'intérieur du sol. En général, le sol est excavé, le cylindre en métal ou en béton mis en place, puis le sol remis à l'intérieur et recompressé à la densité initiale. Parfois, le cylindre de sol est laissé en place, seul l'annulaire étant excavé, le mur en béton est coulé en préservant le sol en place. A la base du cylindre, un fond étanche permet de recueillir l'eau infiltrée par un système de drainage. Dans certains lysimètres, le cylindre entier est posé sur le plateau d'une balance, et permet de suivre à tout instant la variation de poids du sol par gain ou perte d'humidité. Le sol est en général revégétalisé en surface.

Bien qu'ils fournissent des renseignements intéressants, les lysimètres ne sont pas des instruments précis: il existe effectivement des effets de paroi avec infiltration préférentielle, surtout si le sol se rétracte en desséchant; de plus, le fond étanche du lysimètre introduit une discontinuité de pression dans le sol, et engendre l'existence d'un plan artificiel à pression nulle qui n'existe pas dans la nature (voir Chap. 2, le profil de pression dans un sol).

Quand la nappe phréatique n'est pas trop profonde, l'existence d'une évapotranspiration plus intense au voisinage de la surface du sol entraîne un écoulement ascendant de la nappe vers la surface: la diminution de la teneur en eau en surface entraîne l'apparition de forces de capillarité très élevées, qui engendrent une remontée de l'eau, suivant le même principe que l'ascension de l'eau dans un tube capillaire (loi de Jurin). Nous étudierons ceci dans le Chapitre 2 consacré à la zone non saturée.

On conçoit donc que l'évapotranspiration est un phénomène très important. En effet, si l'on tente un bilan global du cycle de l'eau sur la planète, on arrive aux chiffres moyens suivants:

- lame d'eau tombée sur la terre ferme:	720 mm	
- évapotranspiration:	410 mm	(57 %)
- écoulements superficiels et souterrains vers les océans:	310 mm	(43 %)
- évaporation directe sur les océans:	1250 mm	
- lame d'eau tombée sur les océans:	1120 mm	

Le bilan est pratiquement bouclé en admettant que les océans occupent 70 % de la surface du sol, et la terre ferme 30 %:

- excès de précipitation sur la terre par rapport à l'évaporation	310×0,3=93
- déficit de précipitation sur les océans par rapport à l'évaporation.....	130×0,7=91

Ces données sont extraites du "Bilan énergétique de la surface terrestre" de Budiko et al., Akad. Nauk. USRR, IzV. Ser. Géogt, n°1, 1962.

L'eau infiltrée jusqu'à la nappe et qui circule dans les aquifères (dont l'étude sera l'objet essentiel de cet ouvrage) s'écoule et se retrouve en définitive dans les rivières qu'elle alimente en l'absence de pluie: cet apport du milieu souterrain aux écoulements superficiels s'appelle le débit de base, par opposition au débit de crue qui comporte une part de ruissellement superficiel.

C'est pour cette raison que les ingénieurs s'occupant d'hydrologie de surface appellent **souvent** l'évapotranspiration réelle le "déficit d'écoulement": c'est en effet la part des précipitations qui **ne se retrouve en définitive pas** dans la rivière.

Malgré la grande variabilité de la pluie avec la localisation géographique, l'altitude, l'année, etc..., et la grande variabilité des mécanismes de ruissellement, d'infiltration, d'évapotranspiration, ce déficit d'écoulement varie curieusement assez peu: il est, en France, en moyenne de l'ordre de 470 mm par an.

Le mécanisme d'infiltration et d'évapotranspiration sur un profil de sol est illustré sur la Planche 1.

1.4. CAS DE LA NEIGE

Les précipitations tombées sous forme de neige ont un sort voisin de celui de la pluie, mais différé.

- Initialement, humidification, infiltration et ruissellement sont nuls.
- L'évaporation a lieu sous forme de sublimation de la neige.
- Lors de la fonte, l'infiltration et le ruissellement prennent naissance. Le taux d'infiltration est généralement plus élevé, car l'apport d'eau au sol est plus lent que lors d'une pluie. Cependant, si le sol est gelé en profondeur (cas des pays froids), une grande partie de l'eau ruisselle, et peut entraîner avec elle une couche de sol saturé au-dessus du niveau gelé (coulée de boue).

1.5. SCHEMATISATION DU CYCLE DE L'EAU

La Planche 2 résume schématiquement les éléments du cycle de l'eau que nous avons décrit ci-dessus. Elle est inspirée d'Eagleson (1970). Ajoutons-y quelques chiffres:

- *Statistiques*: Estimation des volumes d'eau disponibles dans le monde

- Océans:	1320	millions de km ³	97,20	%
- Neiges et glaces:	30	" "	2,15	%
- Eaux souterraines à moins de 800 m:	4	" "	0,31	%
- Eaux souterraines à plus de 800 m:	4	" "	0,31	%
- Zone non saturée:	0,07	" "	0,005	%
- Lacs en eau douce:	0,12	" "	0,009	%
- Lacs eau salée:	0,10	" "	0,008	%
- Rivières:	0,001	" "	0,0001	%
- Atmosphère:	0,013	" "	0,001	%

- *Dynamiques*: Le volume total mondial des précipitations annuelles peut être estimé à 0,5 million de km³, soit environ 0,04 % du volume d'eau du globe, ou encore 40 fois le volume de vapeur d'eau dans l'atmosphère. Cela implique un renouvellement très rapide de cette humidité atmosphérique: en moyenne, le "temps de résidence" de la vapeur d'eau dans l'atmosphère n'est que de 9 jours.

1.6. LES DIFFERENTES BRANCHES DE L'HYDROLOGIE

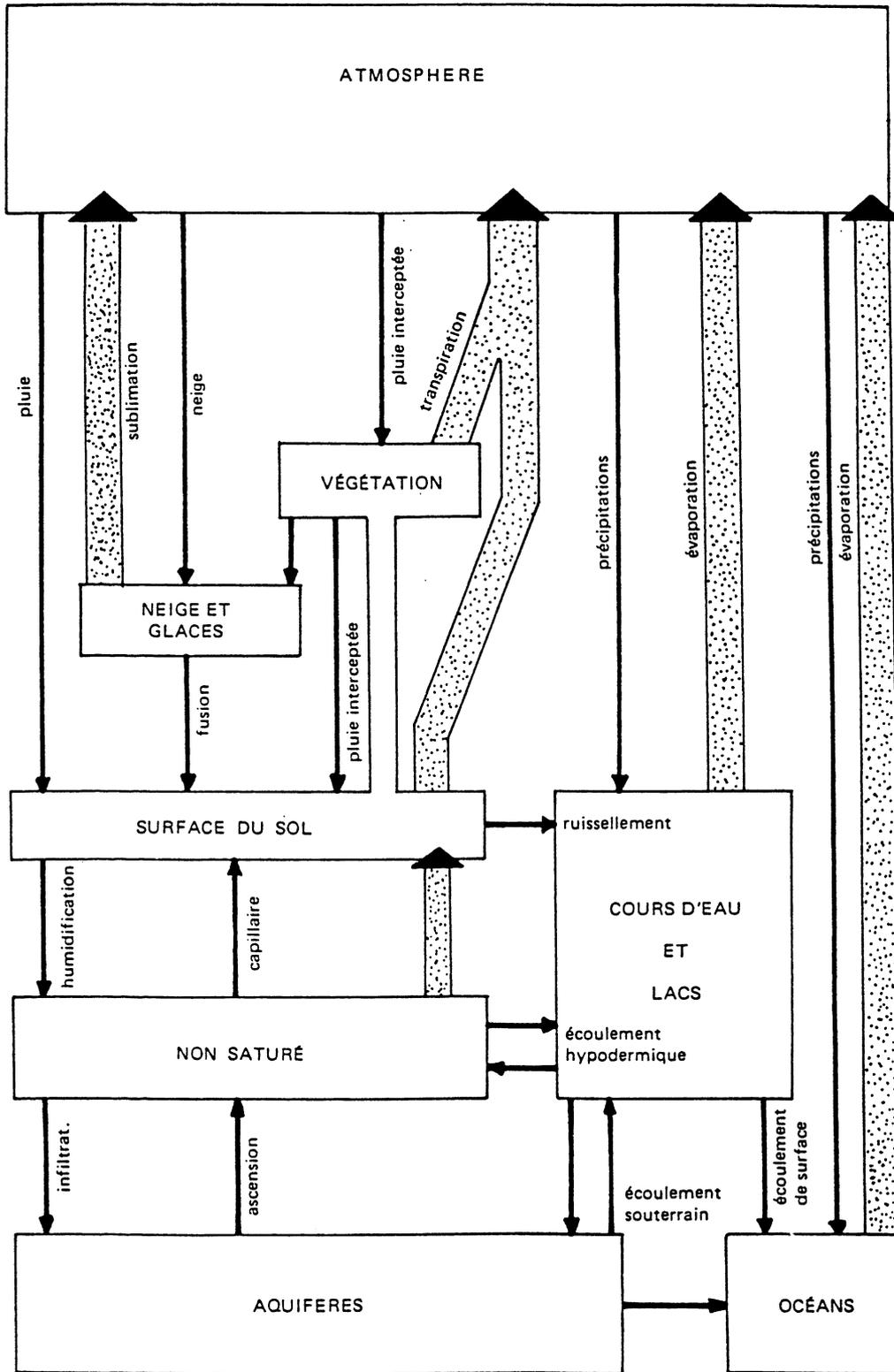
L'étude du cycle de l'eau, ou hydrologie au sens large, est habituellement divisée en trois disciplines distinctes: la météorologie, l'hydrologie de surface et l'hydrogéologie. On trouvera dans la 2^{ème} partie de la bibliographie ("Documents de base à consulter") quelques références utiles à consulter dans chacune de ces disciplines.

La météorologie ou climatologie occupe la première place dans l'étude du cycle de l'eau. Elle comporte plusieurs volets:

- composition et circulation générale de l'atmosphère,
- bilan énergétique de l'atmosphère,
- précipitation, pluie et neige, fonte des neiges, pluies artificielles,
- évaporation et évapotranspiration.

La tendance actuelle est de construire des modèles généraux de circulation atmosphérique, capables de prédire les champs de pression, de vitesse, de température et d'humidité de l'air, ainsi que les précipitations. De tels modèles fonctionnent de façon prédictive, soit à l'échelle de quelques jours (prédictions météorologiques), soit à l'échelle de plusieurs années ou décennies, pour tenter d'estimer l'évolution du climat, sous l'influence des gaz à effet de serre, par exemple.

La nature aléatoire du climat engendre une grande variabilité, à diverses échelles de temps et d'espace, des précipitations qui forment le premier maillon du cycle de l'eau. Ces précipitations sont donc étudiées sous l'angle statistique, et cette façon de voir se retrouve sur les maillons suivants du cycle.



Pl.2 - Cycle de l'eau (d'après Eabson, 1970).

J

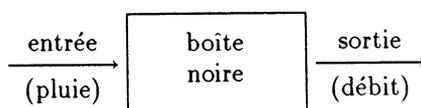
L'hydrologie de surface s'intéresse aux écoulements dans le réseau hydrographique. On peut lui fixer plusieurs objectifs:

- l'évaluation des ressources disponibles soit en régime naturel, soit après un aménagement (barrage) et le calcul du volume de retenue nécessaire pour assurer un débit donné;
- la prévision des risques de crue et des ouvrages nécessaires pour les combattre (réseau de drainage, barrage écrêteur). Bien souvent, un ouvrage (barrage) doit répondre à plusieurs objectifs simultanés et contradictoires: une retenue devant assurer une régularisation des crues doit être vidée le plus vite possible, ce qui est l'objectif opposé d'une retenue devant augmenter un débit d'étiage. D'où de difficiles problèmes de gestion des ouvrages à buts multiples.

Deux méthodes sont couramment utilisées en hydrologie:

- la méthode stochastique: les débits des rivières, à cause de la variabilité des pluies, sont étudiés comme des variables aléatoires;
- la méthode déterministe: le processus de ruissellement et d'infiltration est étudié sous l'angle physique déterministe (équations du mouvement) à partir d'une impulsion supposée connue: la pluie, sur laquelle est concentrée toute la variabilité.

Le bassin peut être représenté comme une boîte noire que l'on étudie suivant la théorie des systèmes:



Au contraire, on peut étudier le bassin hydrographique sous l'angle physique, en tenant compte de l'ensemble des paramètres physiographiques du milieu.

L'hydrologie souterraine ou hydrogéologie fera l'objet essentiel de cet ouvrage.

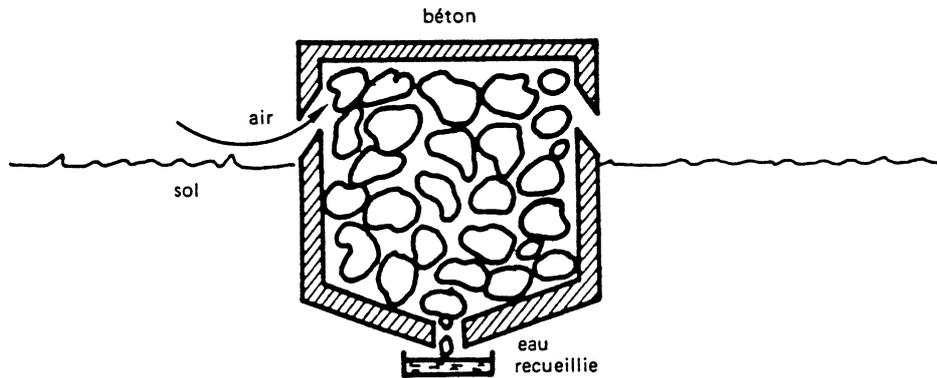
1.7. AUTRES ORIGINES POSSIBLES DES EAUX SOUTERRAINES

On appelle "eaux vadoses" les eaux souterraines dont l'origine provient du cycle de l'eau décrit ci-dessus. Il existe cependant d'autres mécanismes d'apport d'eau dans les sols que celui cité jusqu'ici:

a) *Condensation de la vapeur d'eau atmosphérique* dans les vides du sol (l'équivalent de la rosée matinale en surface). Ce phénomène peut ne pas être négligeable et est généralement désigné sous le terme de "précipitations occultes".

Dans l'ancien temps, on rapporte que la ville de Theodosia, en Crimée, était alimentée en eau par de grands empilements de cailloux reliés à sept fontaines.

Des expériences conduites à Montpellier ont donné (d'après Geze) un débit de 2 ℓ /jour pour un empilement de 5 m^3 de cailloux:



Ces eaux sont encore des eaux vadoses.

b) *Eaux juvéniles*: Ce sont des eaux d'origine profonde. Un magma granitique en se refroidissant expulse un petit volume d'eau.

Ainsi, on a calculé qu'un magma de 1000 m d'épaisseur, contenant 5 % d'eau en poids, engendre un débit de l'ordre de 25 l/mn/km^2 pendant quelques milliers à des dizaines de milliers d'années. Il faut comparer ce chiffre aux 10 l/s.km^2 (infiltration moyenne en France des eaux vadoses), soit environ 4%, ce qui est en général négligeable.

c) *Eaux fossiles*: Ce sont des eaux vadoses datant d'une période plus humide du Quaternaire. L'exemple le plus proche est le Sahara, où l'actuel climat désertique s'est mis en place depuis 5.000 ans environ.

Un autre cas d'eaux fossiles sont les "eaux connées", généralement salées, qui datent de l'époque de formation des sédiments.

d) *Eaux géothermales*: Ce sont, très généralement, des eaux vadoses qui suivent un cheminement compliqué, se réchauffant en profondeur et remontant à la surface.

e) *Eaux minérales*: Ce sont aussi des eaux vadoses, parfois chargées en gaz carbonique d'origine magmatique, qui ont un trajet relativement long entre les aires d'alimentation et les sources ou captages servant d'exutoires. Mais l'appellation "eaux minérales" est accordée en France par l'Académie de Médecine, à partir de l'analyse chimique de la minéralisation contenue et des éventuels aspects thérapeutiques de cette minéralisation.

Chapitre 2

POROSITE DES ROCHES RELATION FLUIDE-SOLIDE EN MILIEU POREUX

- | | |
|--|---|
| 2.1. Porosité totale | 2.2.2. Milieux non saturés |
| 2.2. Relations fluides-solides dans les milieux poreux | 2.3. Mesure de la porosité |
| 2.2.1. Milieux saturés en eau | 2.4. Mesure de la pression de l'eau dans le sol |

La plupart des roches et des sols contiennent naturellement un certain pourcentage de vides qui peuvent être occupés par de l'eau ou des fluides. C'est ce que l'on appelle leur porosité. Il faut tout de suite distinguer l'existence de ces vides avec leur *interconnexion* permettant à un fluide d'y circuler: nous étudierons cette deuxième propriété, la perméabilité, au chapitre 4. Disons que la porosité est une condition nécessaire, non suffisante, de la perméabilité.

Dans l'étude de la porosité, nous distinguerons deux notions:

- l'existence des vides et leurs caractéristiques géométriques; on parlera de porosité totale;
- la façon dont ces vides sont occupés par un fluide et les relations fluides-solides qui s'établissent.

Nous décrirons enfin comment mesurer la porosité et la pression des fluides dans les pores.

2.1. POROSITE TOTALE

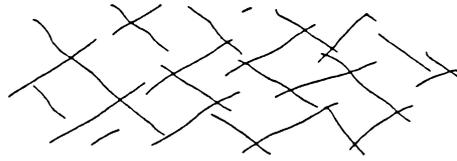
a) Roches grenues

La plupart des roches sont constituées de particules minérales solides, plus ou moins cimentées, formant un squelette autour duquel subsistent des espaces vides: ce sont les milieux poreux au sens des mécaniciens des fluides. Par exemple, les sables et les grès ont une porosité totale qui peut aller jusqu'à 30 %. Mais même les roches que l'on suppose généralement compactes ont une certaine porosité: calcaires, dolomies (surtout secondaires) et même les roches cristallines et métamorphiques (de 1 à 5 %).

Les argiles constituent une catégorie à part: leurs éléments constitutifs, lamellaires, sont organisés en "feuilletés": ce sont des empilements de couches parallèles séparées par des intervalles variables où un fluide peut se loger: cela leur procure, en particulier, des propriétés de gonflement en présence d'eau. Nous verrons de plus que cette eau est fortement liée aux particules solides argileuses. Le pourcentage de vide peut cependant être très élevé: jusqu'à 90 %.

b) Roches fissurées

Un cas particulier de vide dans les roches compactes est la fissuration: par le jeu de la tectonique, la *quasi-totalité* des roches de l'écorce terrestre est fracturée: failles, fissures, diaclases. Ces fissures s'organisent généralement en au moins deux directions principales de fissuration qui découpent la roche en blocs:



On est donc en présence d'un réseau de fissures, plus ou moins interconnectées, qui peut créer des vides dans la roche si les fissures ne sont pas colmatées par un remplissage quelconque (argile, calcite, quartz, etc...).

On parle alors de *porosité de fissure* par opposition à la *porosité d'interstice* vue plus haut. Ces deux types de porosité peuvent d'ailleurs coexister (grès, calcaires, etc...).

c) Définition

$$\text{Porosité totale } \omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total de la roche}}$$

Les mécaniciens des sols utilisent aussi:

$$\text{Indice des vides } e = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume du solide plein}}$$

Nous utiliserons toujours ω , mais on passe de l'un à l'autre par:

$$e\omega = e - \omega$$

soit:

$$\omega = \frac{e}{e+1} \quad e = \frac{\omega}{(1-\omega)}$$

d) Volume Élémentaire Représentatif ou Fonctions Aléatoires: définition des propriétés locales d'un milieu poreux

Si l'on réfléchit un peu, cette notion intuitive de porosité pose quelques problèmes si on veut la définir précisément. Nous allons en discuter ici, en gardant à l'esprit que cette discussion reste valable pour d'autres propriétés des milieux poreux (perméabilité, etc...).

Il existe classiquement deux façons de définir les propriétés locales d'un milieu poreux: la notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER ou REV en anglais) et celle de Fonctions Aléatoires, FA (random functions en anglais; on désigne aussi par "ensemble average" une telle conception des milieux poreux). Nous allons voir que ces deux notions sous-tendent implicitement la représentation que l'on donne aux variations dans l'espace des paramètres hydrogéologiques.

Tout le problème vient de ce que les notions de porosité ou de perméabilité, qui sont des notions ponctuelles quand on écrit une équation aux dérivées partielles par exemple, ne peuvent être définies - ni

mesurées - ponctuellement: un milieu poreux est un assemblage de grains solides et de vides; en-dessous d'une certaine échelle de volume, porosité et perméabilité n'ont plus de signification physique.

L'approche "VER" consiste à dire que l'on affectera à un point mathématique de l'espace la perméabilité ou la porosité d'un certain volume de matériaux, le VER, qui permettra la définition - éventuellement la mesure - de la propriété "moyenne" du volume en question. Il s'agit donc d'une intégration dans l'espace.

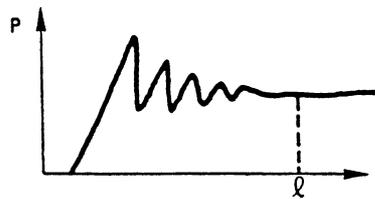
C'est évidemment la première approche qui vient à l'esprit. Elle est conceptuellement liée à la notion d'échantillon que l'on prélève et sur lequel on mesure ladite propriété. Plus précisément, la taille du VER est définie en disant qu'il est:

- suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores, de façon que l'on puisse y définir une propriété moyenne globale, avec l'assurance que l'effet de fluctuation d'un pore à l'autre sera négligeable. On peut fixer, par exemple, le cm^3 ou le dm^3 ;
- suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues pour pouvoir utiliser l'analyse infinitésimale, sans introduire ainsi d'erreur décelable par les instruments de mesure à l'échelle macroscopique, qui s'exprime plutôt en mètres ou en hectomètres.

C'est d'ailleurs un peu le même problème que celui du passage, en mécanique des fluides, de l'échelle "corpusculaire" à l'échelle "parcelle de matière".

Il faut noter que, dans un milieu fissuré, la taille du VER peut devenir étonnamment grande et infirmer la deuxième hypothèse "fonctions continues" à l'échelle des instruments de mesure.

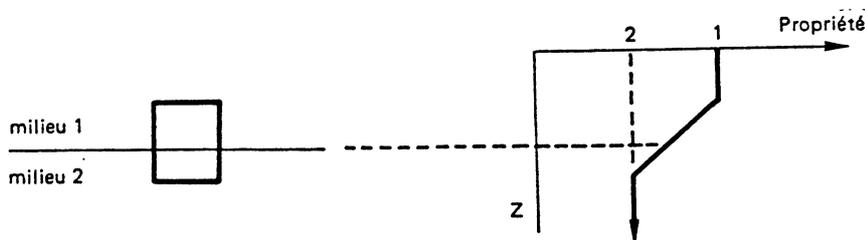
On lie généralement la taille du VER (mesurée par exemple par une de ses dimensions caractéristiques ℓ , telles que rayon de la sphère, côté du cube, ...) à l'existence d'un palier dans la courbe reliant la propriété intégrale étudiée P à la dimension ℓ :



Mais rien ne permet d'affirmer qu'un tel palier existe toujours. La taille du VER reste donc assez arbitraire.

Les principaux reproches que l'on peut de plus faire à cette conception des milieux poreux sont de deux natures:

- d'abord, elle est très mal adaptée au traitement des discontinuités du milieu: quand le VER est déplacé, par la pensée, à la traversée d'une discontinuité, la propriété étudiée subit une variation continue:



ce qui pose parfois des problèmes de représentation aux limites ou entre deux milieux;

- enfin et surtout elle ne fournit aucune base pour étudier, dans l'espace, la structuration de la propriété; tout au plus pourra-t-on dire que les variations dans l'espace des propriétés étudiées doivent être lisses, par le même raisonnement que celui fait plus haut pour les discontinuités.

C. Marle (1967) a proposé de rendre plus rigoureuse cette notion d'intégration dans l'espace. Pour cela, il propose d'utiliser une fonction de pondération $m(x)$ qui soit intégrable et telle que son intégrale étendue à tout l'espace soit égale à l'unité; cette fonction de pondération ne sera pas nécessairement à support borné. La grandeur macroscopique $\langle a \rangle(x)$ sera alors définie à partir de la grandeur microscopique locale $a(x)$ par une convolution étendue à tout l'espace de a par m :

$$\langle a \rangle(x) = \int a(x+x')m(x')dx' \quad \begin{array}{l} x = \text{coordonnées dans l'espace à} \\ 3 \text{ dimensions } (x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

Pour étudier la porosité, on choisira comme fonction $a(x)$ une fonction "indicatrice" telle que $a(x) = 1$ si le point x est dans un pore, et $a(x) = 0$ si le point x est dans un grain.

Marle propose de plus de généraliser cette définition aux propriétés "a" qui ne sont pas continues dans l'espace*, et que l'on peut caractériser par des distributions. La convolution est alors entendue au sens des distributions.

Cette approche a l'avantage de pouvoir rendre continue et indéfiniment différentiable la fonction $\langle a \rangle$, même si a ne l'est pas, en choisissant convenablement m . Si le problème de la taille du VER est éliminé, celui du choix de la fonction de pondération reste encore arbitraire. Il est possible cependant de faire, grâce à cette fonction de pondération, le lien entre cette approche et la seconde, que nous allons maintenant regarder.

L'approche par les Fonctions Aléatoires (FA) est conceptuellement plus correcte. Elle consiste à dire que le milieu poreux étudié est une réalisation d'un phénomène aléatoire. Tentons de préciser ce concept par une image. Supposons que nous fabriquions en laboratoire des colonnes artificielles de milieu poreux en remplissant des tubes de verre identiques d'un sable, toujours le même (par exemple, le même échantillon que l'on réutilise). Si le dispositif de mise en place reste identique à lui-même, chaque colonne de milieu poreux pourra être considérée comme une réalisation de l'ensemble infini des milieux poreux aléatoires que l'on peut ainsi fabriquer. Le mot aléatoire veut simplement dire ici que la configuration, l'arrangement, ou les propriétés du milieu poreux vont varier d'une réalisation à l'autre et que l'outil le plus approprié pour étudier ces variations de propriétés est le langage probabiliste, qui permet d'étudier la loi de distribution de la propriété considérée sur l'ensemble fini des réalisations du milieu.

Si l'on veut choisir un exemple moins académique de réalisation d'un milieu poreux réel, on peut songer aux innombrables plaines alluviales et cônes de déjection descendant sur la côte péruvienne ou chilienne de la Cordillère des Andes sur plusieurs milliers de km, provenant de l'érosion des mêmes matériaux sous les mêmes conditions, donc avec la même nature de dépôt: on peut y voir un ensemble très grand de réalisations d'un même milieu.

Intéressons-nous à une propriété, par exemple la porosité en un point mathématique fixe de l'espace. Si l'on définit cette porosité ponctuelle comme 1 si le point est dans un pore, et comme 0 si le point est dans un grain, on peut définir et calculer la porosité au point considéré en faisant la moyenne des porosités de chaque réalisation. Plus généralement, on pourra calculer, en tous points, les propriétés statistiques de cette porosité (espérance mathématique, variance de dispersion**, covariance, ...) à partir du moment où l'on

* Par exemple, une densité superficielle de matière adsorbée sur l'interface fluide-solide.

** On appellera variance de dispersion cette variabilité propre du phénomène, par opposition à la variance d'estimation dont nous parlerons ultérieurement.

connaîtra, en tous points du milieu, la loi de distribution, ou loi de probabilité*, de la propriété entre les diverses réalisations du milieu poreux.

Mais, dans la pratique, on ne dispose que d'un seul milieu poreux à étudier, donc d'une seule réalisation du phénomène aléatoire "milieu poreux". Pour pouvoir utiliser ces notions probabilistes, on leur adjoint deux hypothèses qui caractériseront un milieu poreux homogène (au sens statistique).

L'hypothèse de stationnarité: On supposera que la loi de probabilité de la porosité étudiée, sur l'ensemble des réalisations, est stationnaire dans l'espace, c'est-à-dire la même en tous points (invariante par translation). Cette stationnarité concerne donc aussi bien la loi à un point d'appui que toutes les lois à plusieurs points d'appui.

L'hypothèse d'ergodicité: On supposera que la réalisation unique étudiée déploie dans l'espace la loi de distribution stationnaire invoquée: il est donc possible, à partir de l'observation de la variation dans l'espace géométrique de la propriété, sur la réalisation unique, d'en déduire la loi de distribution inconnue dans l'ensemble des réalisations possibles (mais absentes) du milieu poreux étudié ainsi que la loi de "conciliation" des valeurs les unes par rapport aux autres, dans l'espace. Un milieu où se vérifient les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité est dit "homogène"**.

On dira alors que la propriété étudiée, par exemple la porosité, est une Fonction Aléatoire stationnaire et ergodique. Elle est alors parfaitement définie en tout point de l'espace par la connaissance de sa loi de probabilité et de sa loi de "conciliation"***.

Comparant cette approche à celle basée sur l'intégration spatiale, Marle (1967) montre que la définition probabiliste peut être considérée comme la limite d'une définition intégrale, quand le milieu poreux est supposé indéfini, ergodique et stationnaire, et que la fonction de pondération utilisée n'est pas à support borné.

En effet, l'intégration spatiale dans un volume infini redonne l'espérance mathématique sur l'ensemble des réalisations possibles si le milieu est bien stationnaire et ergodique.

Nous utiliserons tour à tour ces deux approches de la définition des propriétés des milieux poreux.

* ou plus exactement les lois simultanées en tous les points de l'espace et la façon dont ces lois se "concilient" entre elles, c'est-à-dire comment la valeur prise en un point dépend également des valeurs prises dans l'ensemble des autres points. La loi de probabilité comporte donc non seulement la loi de répartition d'un point donné, c'est-à-dire la probabilité pour qu'en un point on observe une valeur donnée, mais également les lois de répartition simultanée de tous les points du milieu. On parlera, pour les distinguer, de loi à un "point d'appui", ou loi à plusieurs "points d'appui".

** "Homogène" possède donc un sens précis en statistique: c'est celui que nous conserverons pour la suite de l'exposé. Par opposition, un milieu "hétérogène" ne possèdera pas ces propriétés de stationnarité et d'ergodicité. On appellera uniforme un milieu que l'on qualifierait d'homogène dans le langage habituel, c'est-à-dire dans lequel la propriété est la même en tous points. On parlera de non uniforme dans le cas contraire. Un milieu homogène au sens statistique est donc "non uniforme".

*** Explicitons par un exemple ce que cela signifie pour un aquifère "homogène":

- la loi de distribution de la porosité sera, par exemple, normale: on trouvera cette loi à partir d'échantillonnage dans l'espace de la valeur locale de la porosité, mais conceptuellement, cette loi s'applique à la distribution en un point d'appui de la porosité de chacune des "réalisations" possibles de l'aquifère;
- la loi de conciliation dans l'espace n'en est pas pour autant fixée: deux points voisins peuvent avoir des porosités qui soient indépendantes ou, plus probablement, qui manifestent une certaine dépendance: la valeur prise en x se "concilie" avec la valeur prise en y . Nous étudierons ultérieurement cette loi de conciliation dans l'espace par sa covariance ou par son variogramme. C'est la manière la plus simple d'aborder cette dépendance spatiale en ne considérant que la loi de distribution à deux points d'appui, x et y , sans aborder les lois à 3, 4, ... n points d'appui qui existent tout autant que la loi à deux points d'appui qu'exprime la covariance, mais qui sont en pratique inextricables.

On peut noter que ce problème de la définition des propriétés locales d'un milieu à deux phases (ici solide et liquide) n'est pas l'exclusivité du milieu poreux. On pourra se référer utilement aux travaux de Batchelor (1974) ou de P. de Gennes et E. Guyon (1978).

e) Porosité et granulométrie

Si l'on s'intéresse à des milieux poreux *théoriques*, constitués d'assemblages de sphères de même diamètre, on peut montrer qu'il existe six cas possibles d'agencement des sphères contigües conduisant à des porosités de:

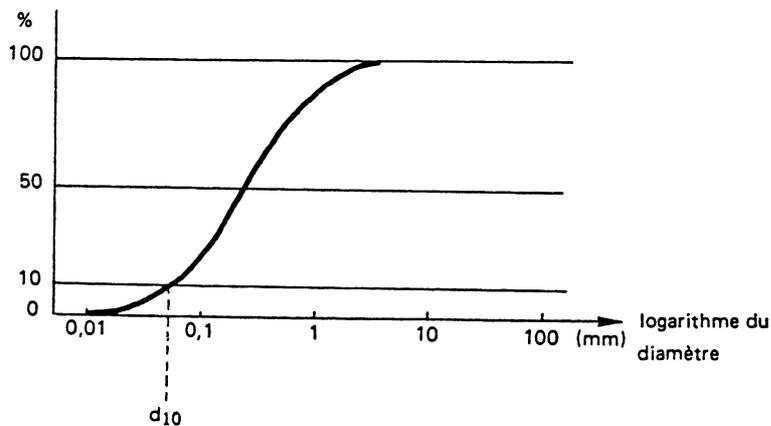
$$26 \% - 30 \% - 40 \% - 48 \%$$

Avec des sphères de tailles différentes, la porosité est toujours plus faible car, comme le dit Houpeurt, "en raisonnant sur les gros grains on peut dire que les petits occupent une partie des pores qui existeraient entre eux, et inversement, en raisonnant sur les petits on peut dire que tout gros grain apporte une compacité supérieure par sa seule présence".

Pour des grains non sphériques, cette tendance à l'abaissement de la porosité est compensé, dans une certaine mesure, par les irrégularités de forme des grains qui s'opposent à leur serrage maximal.

Pour les milieux non consolidés (sables, ...), on cherche à connaître la distribution de la taille des grains du milieu.

On réalise une analyse granulométrique du milieu, par tamisage par exemple, ce qui permet de tracer la "courbe granulométrique" donnant le pourcentage (en volume ou en poids plus généralement) d'éléments qui traversent un tamis dont les trous ont un diamètre donné:



On appelle "diamètre efficace d_{10} " la dimension telle que 10 % des éléments du milieu soient plus petits que d_{10} . On admet que ce d_{10} est le paramètre qui conditionne le plus les propriétés de perméabilité du milieu (voir Chap.4).

Cependant, il est toujours nécessaire de mesurer la porosité du milieu sans détruire l'agencement des grains du milieu (voir § 2.3.): on sait que la porosité varie en fonction de l'agencement (cf. les sphères) et que cet agencement est fonction de la consolidation, du tassement du milieu.

La Planche 3 donne quelques exemples de courbes granulométriques et une classification des termes employés, selon la Société Internationale des Sciences du Sol: *graviers - sables - silts - argiles*.

f) Porosité de surface

Sur une section de milieu poreux, on peut définir une

$$\text{Porosité de surface totale } \omega_s = \frac{\text{Surface des vides}}{\text{Surface totale}}$$

Si la distribution et la taille des vides sont purement aléatoires, la porosité de surface est indépendante de l'orientation de la surface étudiée et a, de plus, la même valeur que la porosité de volume: il suffit, pour s'en convaincre, d'intégrer la porosité de surface sur une longueur élémentaire orthogonale au plan de section. Il faut, bien sûr, considérer des volumes et des surfaces de l'ordre du VRE.

Il n'en va cependant pas de même si la distribution des vides n'est pas aléatoire, mais suit une loi d'organisation fonction de la genèse du milieu.

A Fontainebleau, le Centre de Morphologie Mathématique a beaucoup étudié les propriétés morphologiques des milieux poreux et, en particulier, mis au point un appareil, l'analyseur de texture, qui peut étudier l'agencement des pores et des pleins d'une section de milieux poreux, notamment la porosité: voir les travaux de Serra.

g) Surface spécifique

Elle est définie par:

$$S_{sp} = \frac{\text{Surface totale des vides intersticiels}}{\text{Volume total du milieu}}$$

Elle varie beaucoup d'un milieu à l'autre, étant d'autant plus grande que le milieu est plus divisé. Par exemple, pour des sphères de rayon R en arrangement cubique, elle vaut:

$$S_{sp} = \frac{\Pi}{2R}$$

Voici quelques ordres de grandeur:

- 150 à 220 cm^2/cm^3 pour un sable,
- 1500 cm^2/cm^3 pour un grès fin,
- plusieurs millions de cm^2/cm^3 pour une argile,

par exemple: 1500 m^2/m^3 pour une montmorillonite.

Ce paramètre a une grande importance pour les phénomènes de liaison fluide-solide que nous allons aborder maintenant.

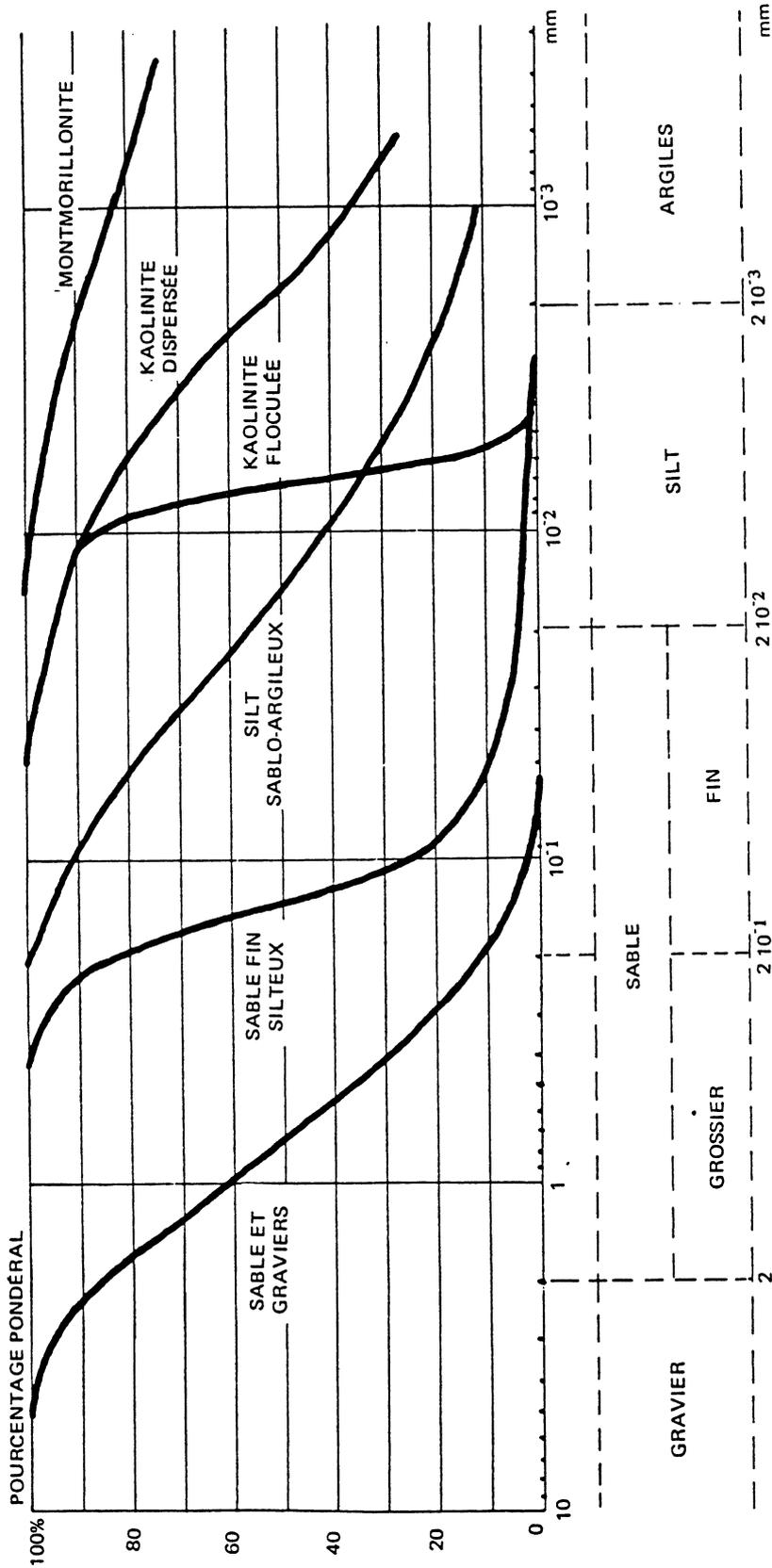
2.2. RELATIONS FLUIDES-SOLIDES DANS LES MILIEUX POREUX**2.2.1. Milieux saturés en eau**

Occupons-nous d'abord des milieux à deux phases: solide et eau. Mis à part l'eau de constitution des minéraux de la roche, dont nous ne parlerons pas, on est obligé de distinguer:

- l'eau liée,
- l'eau libre.

a) L'eau liée

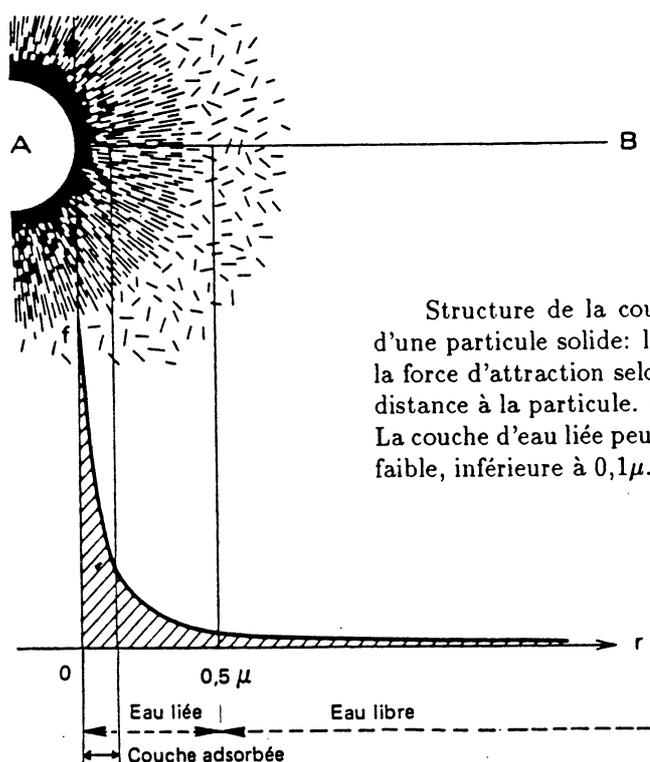
Elle est attachée à la surface des grains par le jeu des forces d'attraction moléculaire. Ces forces décroissent avec la distance de la molécule d'eau au grain:



COURBES GRANULOMÉTRIQUES DE QUELQUES SOLS
 ET CLASSIFICATION GRANULOMÉTRIQUE
 DE LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES SCIENCES DU SOL
 (D'APRES BEAR, 1972)

- Une première couche adsorbée, dont l'épaisseur est de l'ordre de quelques dizaines de molécules (0,1 micron environ), correspond à une orientation des molécules d'eau à structure dipolaire H-OH perpendiculairement à la surface du solide. Les forces d'attraction de ces molécules atteignent plusieurs dizaines de milliers de bars, mais décroissent rapidement avec la distance. Dans cette couche adsorbée, les propriétés de l'eau sont fortement modifiées: très grande viscosité, forte densité (environ 1,5). De nombreux ions, principalement des cations, peuvent y être retenus (adsorbés) par attraction conjuguée des molécules d'eau et de celles du solide. Nous y reviendrons ultérieurement.
- Une zone de transition, entre 0,1 et 0,5 μ , contient des molécules d'eau qui supportent encore une attraction non négligeable et sont immobiles.
- Au-delà, les forces d'attraction sont négligeables, et l'eau est dite libre.

Il est évident que cette limite de 0,5 μ est un peu arbitraire et varie d'un milieu à l'autre: il s'agit ici d'illustrer les phénomènes. La figure suivante illustre la variation de la force d'attraction des molécules d'eau, et leur orientation au voisinage d'un grain solide.



Ces phénomènes d'adsorption des molécules d'eau et des ions sont liés à la surface spécifique du milieu et sont particulièrement importants pour les minéraux argileux, ce qui réduira beaucoup la possibilité pour l'eau et les ions de circuler dans une argile, et nous amènera à définir une *porosité cinématique* d'un milieu poreux.

b) Eau libre

Nous l'avons déjà définie, c'est celle qui est en dehors du champ d'attraction des particules solides, et qui est susceptible de se déplacer - par opposition à l'eau liée - sous l'effet de la gravité ou des gradients de pression (voir Chap. 4).

c) Porosité cinématique d'un milieu saturé

En quelque sorte, l'eau liée peut être considérée du point de vue déplacement des fluides comme faisant partie du solide. Le volume vide où l'eau peut circuler est donc inférieur à la porosité totale: on définit ainsi une *porosité cinématique* (ou encore efficace) d'un milieu saturé.

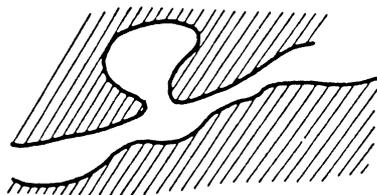
Mais il faut bien voir que la définition de la porosité est déjà liée à la notion de circulation des fluides, non au pourcentage de volume occupé par la phase fluide.

D'autres phénomènes que l'adsorption viennent limiter la porosité cinématique:

- l'existence de pores non connectés: ce sont des "bulles" de liquide insérées dans la phase solide. Comme le liquide contenu ne peut circuler, on ne prend pas ces vides en compte dans la porosité cinématique. Nous verrons d'ailleurs au § 2.3. que certaines méthodes de mesure de la porosité, basées sur l'imprégnation du milieu poreux par un fluide, excluent les pores non connectés.

L'exemple le plus habituel est celui de la dolomite secondaire (c'est-à-dire une dolomite formée postérieurement au dépôt, par transformation diagenétique de calcite en dolomite). Cette transformation s'accompagne d'un retrait, avec cristallisation anguleuse de la dolomite. La porosité totale est élevée: 20 à 30 %, mais la porosité cinématique faible car ces vides ne sont pas interconnectés.

- l'existence de pores culs-de-sac, par exemple:



L'eau contenue dans ces pores culs-de-sac est pratiquement immobile, seule circule l'eau dans les "conduits" du milieu.

On exclut donc ces pores de la porosité cinématique, cependant ils auront un rôle à jouer quand nous étudierons les mécanismes de compressibilité ou transports d'éléments dissous dans les milieux poreux.

- à une échelle encore supérieure, une roche fissurée, dans laquelle l'eau ne circule que dans les fissures, aura une porosité cinématique liée au volume de ces fissures, même si la matrice rocheuse non fissurée est poreuse. Ainsi un granite fissuré, qui a une porosité totale de matrice de 1 à 2 %, pourra avoir une porosité cinématique inférieure à 1‰ car la matrice elle-même est très peu perméable.

En définitive, porosité cinématique $\omega_c = \frac{\text{Volume d'eau qui peut circuler}}{\text{Volume total de la roche}}$

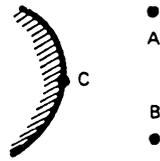
d) Remarques: Conséquences pour le traçage de l'eau

Nous verrons ultérieurement que l'on peut relier la porosité cinématique à la vitesse de circulation de l'eau dans le sol. D'où l'idée d'ajouter un traceur à l'eau, pour mesurer expérimentalement in situ la vitesse de l'eau.

Ceci pose pas mal de problèmes, car il faut choisir un traceur qui ne soit pas adsorbé dans la couche d'eau liée ou à la surface des grains. Mais même si ce problème est résolu (dans certains cas, en utilisant par exemple de l'eau tritiée avec un atome de tritium ^3H), il subsiste une inconnue dont on ne connaît pas, à l'heure actuelle, l'importance exacte.

En effet, notre schéma phase eau en circulation-phase eau immobile (liée ou pores à eau immobile) correspond à une certaine échelle microscopique d'observation des phénomènes, celle de couches et de filets liquides. Si l'on descend à l'échelle moléculaire, les choses peuvent changer: il peut y avoir des échanges continuels de molécules d'une phase à l'autre sous l'effet de l'agitation moléculaire; par exemple, une molécule en circulation peut se retrouver immobilisée au cours de son parcours pendant qu'est relâchée une molécule initialement fixe: du point de vue des circulations de fluide, rien n'est perceptible, mais la notion de traçage du cheminement d'une molécule d'eau perd son sens. A la limite, est-on en droit de faire une distinction entre deux molécules d'eau que rien ne permet physiquement de distinguer? Ainsi une molécule en position A à l'instant t_0 et en B à l'instant t_1 peut très bien avoir cheminé suivant A,C,B et avoir été "échangée" en

C par une molécule initialement liée, à laquelle elle a communiqué son énergie. La question: "la molécule en B est-elle ou non celle qui était en A" a-t-elle un sens?



Dans un milieu poreux, le cheminement d'une molécule d'eau peut être beaucoup plus complexe que l'image microscopique ne le laisse imaginer, rendant peut-être illusoire la notion de traçage pour atteindre autre chose que la vitesse de circulation d'un élément en solution dans l'eau.

2.2.2. Milieux non saturés

Ce problème se complique du fait de l'existence d'une troisième phase: l'air, en plus de l'eau et du solide.

a) Teneur en eau et saturation volumique

On définit la teneur en eau Θ dans un VRE par le rapport:

$$\Theta = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total}}$$

et la saturation volumique:

$$s = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total des pores}}$$

Θ peut varier de 0 à la porosité totale ω , et s de 0 à 1, ou 0 à 100 %.

b) Relations air-eau à différentes teneurs en eau

On constate, dans un sol contenant à la fois de l'air et de l'eau, que l'eau libre "mouille" les grains solides, c'est-à-dire les entoure, tandis que l'air a tendance à être disposé au milieu des vides. On obtient ainsi pour diverses teneurs en eau:

- Sol presque saturé en eau:

- La phase eau est continue et peut circuler sous l'influence de la gravité.

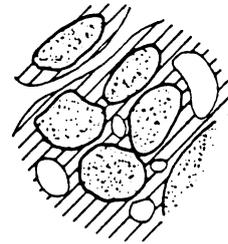
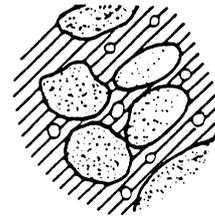
On parle d'eau "funiculaire", ou eau gravifique.

- La phase air est discontinue et ne circule pas. Elle peut atteindre 10 à 15 % de la porosité, même dans un sol dit saturé proche de la surface libre de la nappe.

Les bulles d'air emprisonnées ne peuvent franchir les points de striction des canalicules joignant les pores que s'il existe un gradient de pression suffisamment élevé dans la phase eau.

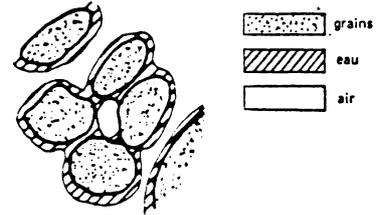
- Sol à la saturation d'équilibre, ou encore à la "capacité de rétention capillaire":

- La phase eau est encore continue, mais ne circule plus sous la seule influence de la gravité. On dit, en agronomie, que le sol a atteint sa "capacité au champ": celui d'un sol quelques jours après la pluie quand l'eau qui peut s'écouler par gravité a quitté le profil. On appelle parfois "porosité de drainage" (en anglais: specific yield) la part de la porosité qui peut être drainée par gravité, notée ω_d , c'est-à-dire la différence entre la teneur en eau du milieu saturé et celle obtenue à la saturation d'équilibre. Notez qu'il y a transmission de la pression à travers la phase eau continue, et qu'en conséquence la saturation d'équilibre varie en toute rigueur avec l'élévation du point considéré au-dessus de la surface libre de la nappe (voir plus loin).
- La phase air est également continue, mais ne circule généralement pas.



- Sol faiblement saturé:

- L'eau entoure les grains et occupe des anneaux discontinus aux points de contact de ceux-ci. On parle d'anneaux "pendulaires", ou eau "pendulaire". La phase eau est toujours continue, les pressions se transmettent, mais les mouvements de l'eau sont très lents du fait de la minceur de la pellicule mouillée.
- La phase air est continue, mais généralement immobile. Dans ce cas, l'évaporation à l'intérieur du sol peut devenir non négligeable vis-à-vis des autres flux. L'eau évaporée, pour quitter le sol, doit migrer par diffusion moléculaire vers l'extérieur, ce qui est un phénomène très lent. On pourrait aussi concevoir une migration par cellules de convection densitaires, mais un tel phénomène n'a jamais encore été mis en évidence.



- Saturation irréductible:

Pour descendre en-dessous de la saturation d'équilibre, il a fallu mettre en œuvre d'autres phénomènes que la circulation gravitaire: évaporation et transpiration des végétaux.

Si la teneur en eau continue à décroître, on ne retient finalement que l'eau liée, appelée encore eau hygroscopique par certains.

Cette saturation irréductible est en fait fonction des moyens de dessèchement utilisés:

- saturation irréductible dans un sol naturel: le dessèchement est engendré par les phénomènes naturels;
- saturation irréductible à 105°. On dessèche généralement un sol par étuvage à 105°. On a choisi arbitrairement cette température car on risque au-delà de commencer à décomposer certains minéraux et à extraire de l'eau de composition de la phase solide. Il est certain cependant qu'une faible fraction d'eau liée est encore présente dans le sol. Ainsi, il faut chauffer une argile à 900° pour en extraire toute son eau.

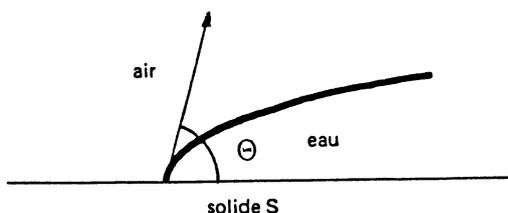
La pellicule d'eau liée forme en fait un film continu qui entoure les grains quel que soit l'état de saturation.

c) Pression capillaire

Entre deux fluides en contact, ou un fluide au contact d'un solide, il existe une énergie **superficielle** engendrée par la différence entre la force d'attraction des molécules vers l'intérieur dans chaque phase et la force d'attraction des molécules à travers la surface de contact. Cette énergie superficielle se manifeste par une tension superficielle σ_{ik} , définie par la quantité de travail nécessaire pour séparer l'unité de surface des substances i et k . La tension σ_{ik} est une constante pour deux substances données, qui ne varie qu'avec la température.

La tension superficielle σ_i entre un liquide et sa propre vapeur est appelée tension de vapeur.

Pour deux fluides en contact avec un solide, la loi de Young donne l'angle de raccordement de l'interface:



Θ , mesurée de 0 à 180° dans le fluide plus dense (l'eau ici) est donné à l'équilibre par:

$$\cos \Theta = \frac{\sigma_{sa} - \sigma_{se}}{\sigma_{ae}}$$

Il n'y a pas d'équilibre possible si ce rapport est supérieur à 1: dans ce cas, l'un des fluides (l'eau ici) se répand indéfiniment sur le solide.

Si $\Theta < 90^\circ$, le fluide est dit mouillant. C'est le cas de l'eau ici.

Si $\Theta > 90^\circ$, le fluide est dit non mouillant. C'est le cas de l'air ici.

On appelle $\sigma_{ae} \cos \Theta$ la tension d'adhésion.

De part et d'autre de l'interface air-eau, la pression n'est pas la même dans les deux fluides. On appelle *pression capillaire* cette différence de pression.

$$P_c = P_{air} - P_{eau}$$

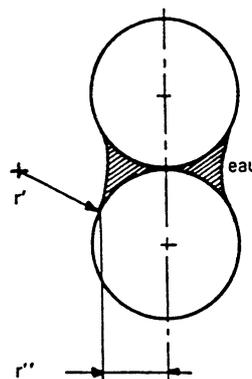
si r est le rayon moyen de courbure de l'interface:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$$

r' et r'' rayons de courbure principaux.

L'équation de Laplace donne la pression capillaire:

$$P_c = \frac{2\sigma_{ae}}{r}$$



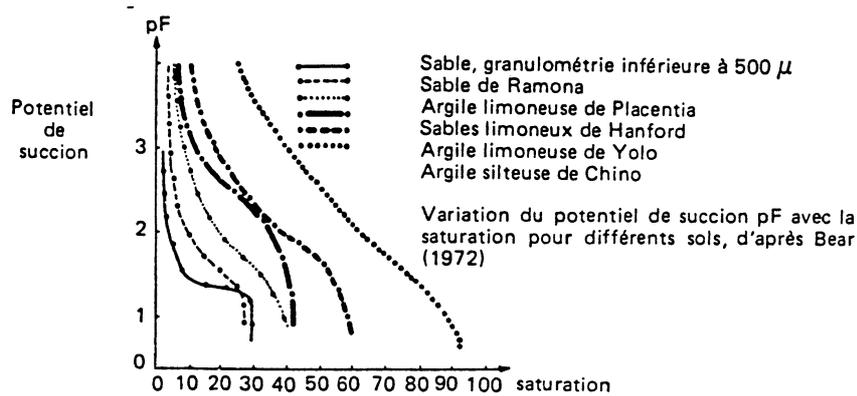
Celle-ci peut être très élevée si les rayons de courbure sont petits. Comme la phase air, si elle est continue, est généralement à la pression atmosphérique, ceci entraîne que la phase eau est à une pression négative qui peut atteindre plusieurs bars: on parle alors de succion ou de tension. Ainsi le point de flétrissement de certains végétaux est atteint pour une tension de l'ordre de 15 bars si on prend zéro comme pression atmosphérique de référence. Si on prend, par exemple, une tension d'interface air-eau de 0,076 Newton/m à 20°, cela donne un rayon de courbure moyen des ménisques d'eau dans le sol non saturé de 0,1 μ , soit proche de la dimension de la couche d'eau adsorbée.

Dans un milieu poreux, à chaque teneur en eau correspond une répartition des phases air et eau à l'intérieur d'un VRE. La phase eau étant continue, les pressions s'y égalisent à une cote donnée; en moyenne, les interfaces prennent alors un certain rayon de courbure et il en résulte une pression capillaire unique; cette pression capillaire est donc une fonction de la teneur en eau, ou de la saturation. Si on suppose la pression de l'air nulle, on trace souvent la pression dans l'eau en fonction de la saturation en définissant le potentiel de succion:

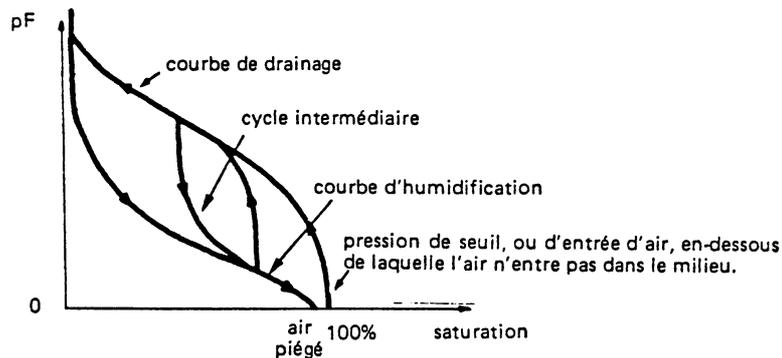
$$pF = \log_{10} \left(\frac{-P_{eau}}{\rho g} \right), \quad \frac{P_{eau}}{\rho g} \text{ en cm}$$

ρ : masse spécifique de l'eau.

On obtient, par exemple, des courbes:



Cependant, on constate que cette pression capillaire présente des phénomènes d'hystérésis avec la saturation suivant que l'on assèche ou que l'on humidifie le sol: en effet, la forme que prennent les interfaces, à une saturation donnée, n'est pas la même suivant que l'on imbibe un sol sec ou que l'on draine un sol humide: des "bulles" de fluide restent prisonnières, les angles de raccordement des interfaces ne sont pas tout à fait les mêmes, il se produit des phénomènes de dilatation ou de tassement, etc... On observe donc deux potentiels:



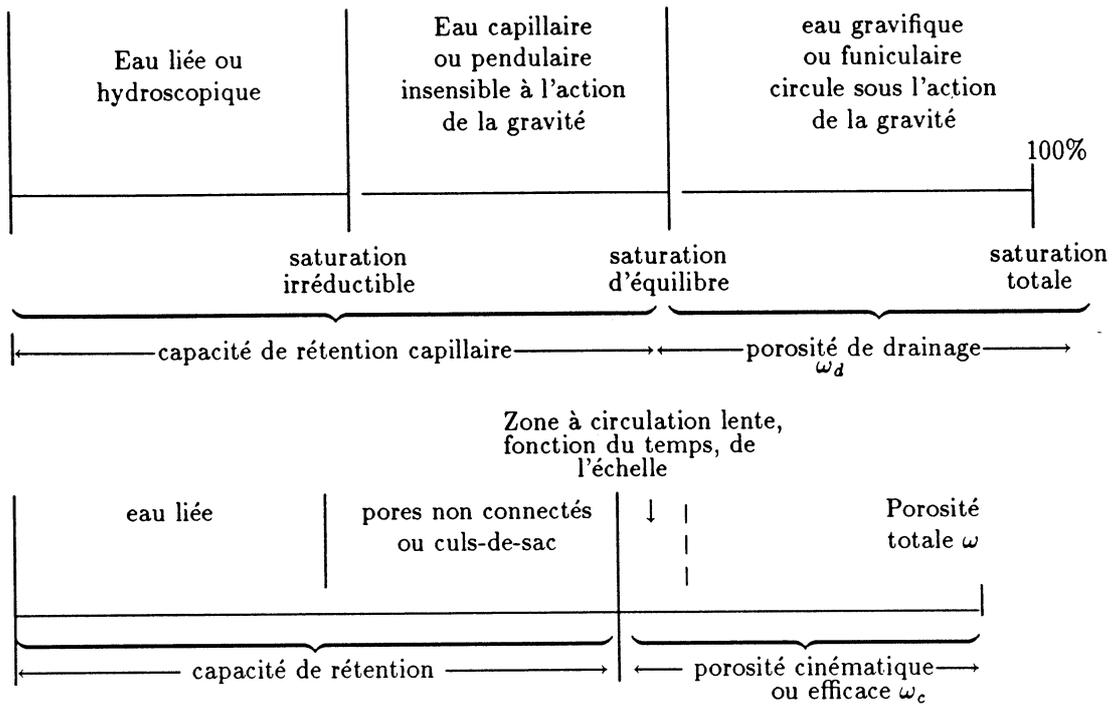
Il existe toute une série de cycles intermédiaires tels que celui dessiné entre les deux courbes enveloppes.

Il faut noter enfin que si l'on attend un temps assez long, l'air piégé est finalement dissous ou entraîné par la circulation d'eau et le point représentatif évolue d'une courbe vers l'autre.

d) Profils de teneur en eau

Le schéma suivant résume les principaux intervalles que l'on a définis dans le continuum sol-eau-air.

Toutes ces zones se retrouvent également sur un profil de sol tel que nous en avons vu au Chap.1: la Planche 4 illustre ce découpage.



Au-dessus du niveau de la nappe se trouve d'abord une zone saturée à 100 %, ou presque, appelée frange capillaire, où la pression de l'eau est inférieure à la pression atmosphérique: c'est l'équivalent de l'ascension capillaire dans des tubes; il faut en effet qu'existe une certaine pression capillaire (pression de seuil) pour que de l'air à la pression atmosphérique et de l'eau soient en équilibre à travers une interface. Il peut cependant y avoir de l'air piégé dans cette zone (d'où une saturation inférieure à 100 %, par exemple 85 à 90 %).

Au-dessus, la pression capillaire augmente et la saturation diminue jusqu'à atteindre la saturation d'équilibre: le profil dessiné est statique.

En surface, nous avons représenté un sol desséché et un sol humidifié, qui sont en situation transitoire:

- l'eau gravifique va s'infiltrer et descendre le long du profil;
- la dessiccation de surface va engendrer une circulation ascendante, que nous étudierons avec les circulations dans les milieux non saturés.

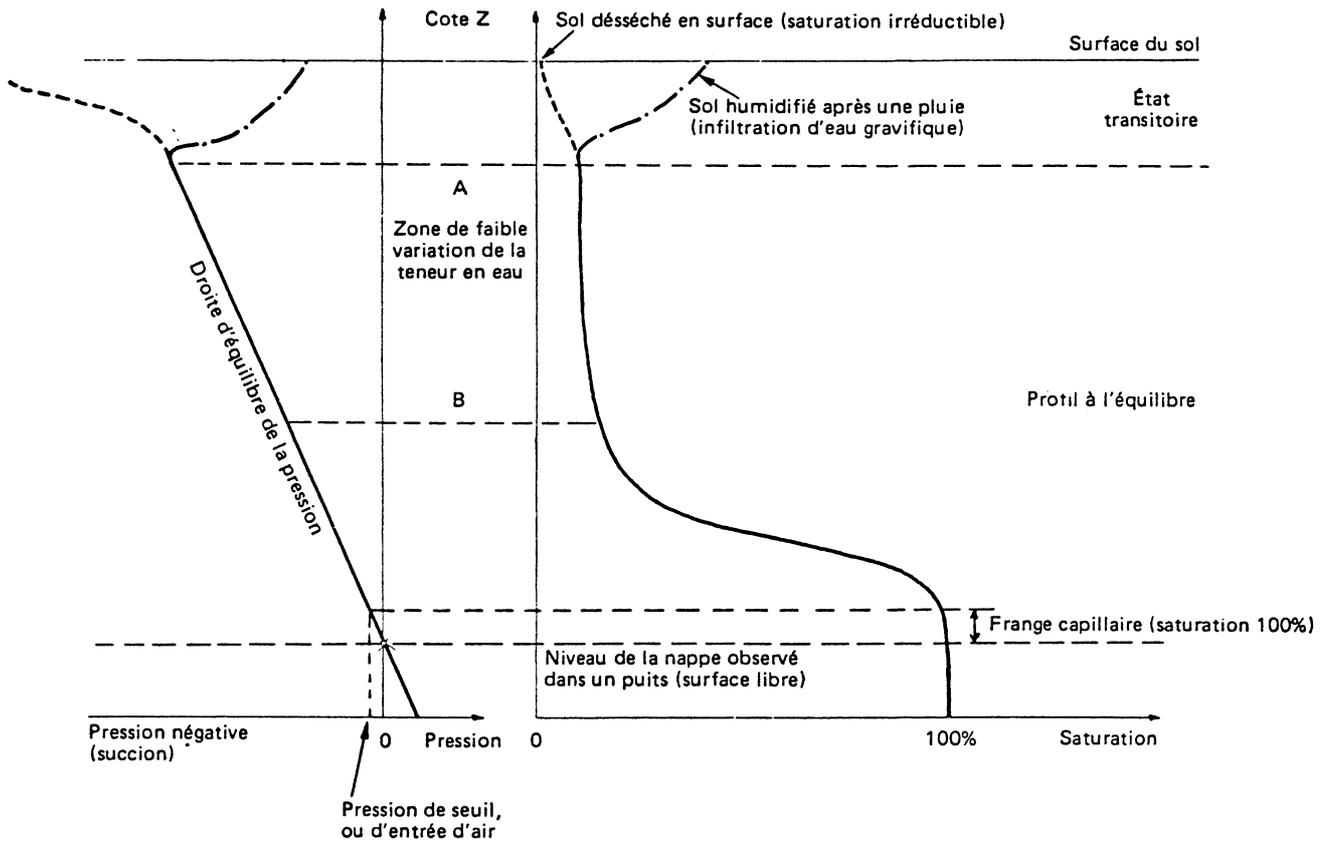
En regard du profil de saturation, nous avons porté le profil de pression. D'après les lois de l'hydrostatique, un profil à l'équilibre doit montrer une variation linéaire de la pression avec la cote.

Par définition, la pression est nulle (c'est-à-dire égale à la pression atmosphérique) à la "surface libre" de la nappe. En dessous, la pression croît linéairement avec la profondeur, au-dessus, elle décroît (devient une succion) avec la cote. Pour s'en convaincre, songez que tant que la phase eau est continue, deux points à l'équilibre hydrostatique distants de ΔZ verticalement ont une différence de pression $\rho g \Delta Z$.

Réciproquement, tout point représentatif se situant à gauche de la droite d'équilibre de la pression signifie qu'un écoulement ascendant s'établit (respectivement à droite... descendant).

Notez que l'existence de la zone AB, où la saturation semble ne pas varier alors que la pression varie, est liée à la forme des courbes succion-teneur en eau présentée à la page précédente. Sur ces graphiques, la succion est portée sur une échelle logarithmique: en dessous d'une certaine saturation, les profils sont presque verticaux, c'est-à-dire qu'une variation d'une puissance de 10 de la pression n'engendre qu'une très faible variation de la saturation.

Dans la pratique, un sol n'est presque jamais en équilibre hydrostatique et le profil de pression réel s'écarte presque toujours de la droite d'équilibre; mais le sens de cet écart donne justement la direction de l'écoulement.



Pl.4 - Profil de saturation et de pression dans un sol.

Ces pressions négatives élevées (donc inférieures au vide absolu) auxquelles peut être soumise l'eau dans un sol non saturé ne doivent pas surprendre: elles mesurent en fait un état énergétique de l'eau du sol, c'est-à-dire la quantité d'énergie qu'il faut fournir pour extraire une molécule, qui est liée au sol par des forces électrostatiques.

2.3. MESURES DE LA POROSITE

a) Méthodes directes sur échantillon

Elles sont assez délicates et doivent être réalisées dans un laboratoire spécialisé:

- On mesure d'abord le volume total de l'échantillon, soit par ses dimensions, en particulier la dimension de l'échantillon de sol non consolidé que l'on prélève par carottage avant que la structure ne soit détruite, soit par le volume de liquide qu'il déplace après que sa surface ait été imperméabilisée.
- On peut ensuite mesurer le volume de solide par la poussée d'Archimède sur la phase solide baignée dans un liquide mouillant (saturation sous vide, ou à l'eau bouillante, ou avec du CO₂ dissous ensuite par l'eau, etc...). On obtient ainsi la porosité des vides connectés entre eux. Il faut broyer l'échantillon pour atteindre la porosité de tous les vides même non connectés.
- On peut ensuite mesurer le volume des pores connectés:
 - . en injectant du mercure à pression élevée dans la roche en faisant le vide dans l'échantillon pour déplacer l'air contenu;
 - . en pesant l'échantillon sec et ensuite saturé d'eau, etc...

b) Méthodes indirectes in situ

- Résistivité du terrain

A l'exception des argiles, les minéraux usuels du sol sont isolants et l'électricité circule dans le sol dans la phase liquide. La résistivité sera donc fonction de la porosité.

Les géophysiciens proposent la relation empirique suivante: on définit le "facteur de formation" F par le rapport des résistivités de la roche et de l'eau qu'elle contient:

$$F = \frac{\text{résistivité de la roche}}{\text{résistivité de l'eau contenue}}$$

La formule d'Archie donne alors:

$$F = \frac{C}{\omega^m} \quad C \simeq 1$$

m est le "facteur de cimentation" qui varie de 1,3 pour les roches non consolidées à 2 pour les calcaires, ω est la porosité totale.

On peut corriger la formule s'il existe des particules argileuses en quantité connue dans la roche.

La porosité obtenue en mesurant ces deux résistivités est plutôt une porosité totale.

Ces formules sont utiles pour interpréter des diagraphies électriques dans des sondages.

- Diagraphie neutron

On bombarde le terrain avec des neutrons rapides (sources à l'américium généralement), puis on compte les neutrons lents produits par ralentissement des neutrons rapides sur les atomes d'hydrogène, qui sont essentiellement présents dans la phase eau.

On peut obtenir ainsi la porosité des milieux saturés, et surtout la teneur en eau des milieux non saturés. Il est préférable cependant de faire un étalonnage de la méthode sur un échantillon de sol sec, pour retrancher la part des atomes d'hydrogène qui ne sont pas liés à la porosité (eau de constitution, argiles, ...).

- *Mesure des densités (méthode gamma-gamma)*

On bombarde le terrain avec des rayons gamma. On détecte la partie non absorbée du rayonnement à une distance fixe de l'émetteur. Cette quantité est fonction inverse de la masse spécifique des terrains traversés par le rayonnement. Or cette masse spécifique est liée à la porosité:

$$\rho_r = \omega \rho_e + (1 - \omega) \rho_s$$

si ρ_r , ρ_e , ρ_s sont les masses spécifiques de la roche en place, de l'eau et des grains solides qui la constituent, respectivement.

- *Vitesse du sol*

Elle est liée à de nombreux paramètres, en particulier à la porosité par la quantité de fluide contenue dans la roche. La méthode n'est cependant pas très utilisée.

c) *Quelques valeurs de porosité*

Nous avons défini un certain nombre de grandeurs:

- porosité totale, ω ,
- porosité de drainage d'un sol non saturé, ω_d , et son complément, la capacité de rétention capillaire,
- porosité cinématique d'un milieu, ω_c , et son complément, la capacité de rétention saturée.

Ces notions ne sont pas toujours faciles à distinguer et à évaluer. A titre d'exemple, voici les résultats obtenus par King aux USA (cités par Geze) sur le drainage de sables homogènes calibrés:

Taille des grains	Porosité totale calculée	Percolation: quantité d'eau recueillie en:					
		1° 1/2h	2° 1/2h	9 jours suivants	du 10 ^e jour à 2,5 ans	Total	Rétention capillaire après 2,5 ans
0,475 mm	38,86 %	10,68 %	4,88 %	8,72 %	2,60 %	26,88 %	6,87 %
0,083 mm	39,73 %	1,26 %	0,90 %	11,29 %	2,01 %	15,46 %	18,87 %

La différence qui existe entre porosité totale calculée et la somme porosité de drainage+rétention capillaire vient des erreurs de mesures et de calcul de la porosité totale. On constate donc que la porosité de drainage est en fait fonction du temps que l'on laisse à la roche pour s'égoutter.

Si l'on s'intéresse à la quantité d'eau que l'on peut extraire d'une roche par drainage, c'est la porosité de drainage qu'il faut tâcher de mesurer.

Si c'est à la quantité d'eau qui s'écoule dans une roche saturée, par exemple pour un calcul de vitesse d'écoulement, c'est à la porosité cinématique qu'il faut penser.

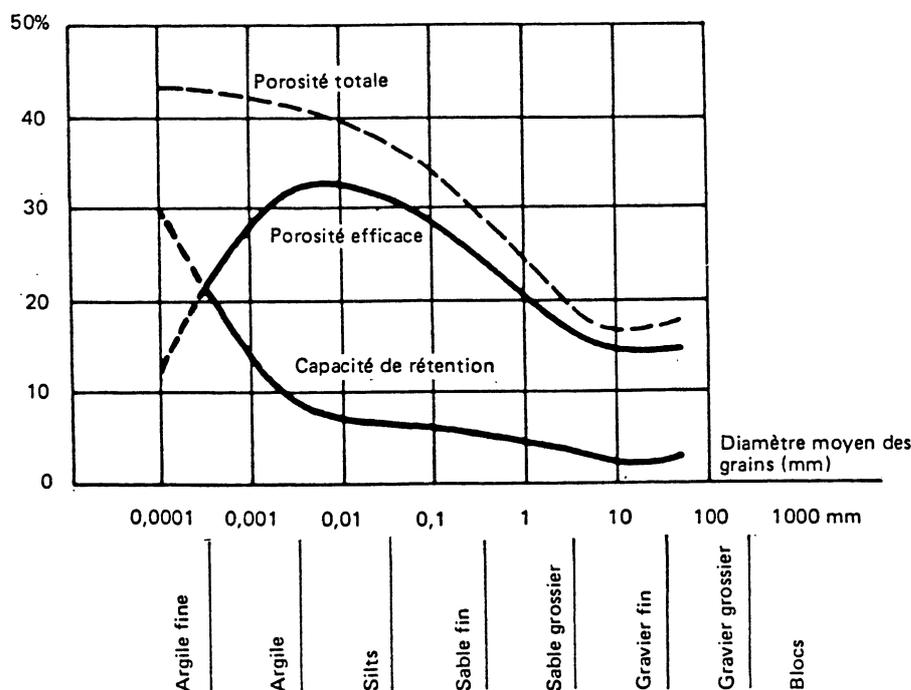
Enfin, si c'est à la quantité totale d'eau contenue dans un milieu poreux, par exemple pour des problèmes touchant à la compressibilité de la phase fluide, ou à la possibilité pour des ions en solution de se diluer dans la phase fluide, c'est à la porosité totale qu'il faut penser.

Il faut reconnaître que, dans la pratique, on parle souvent de porosité sans spécifier à laquelle on se réfère; en particulier porosité de drainage et porosité cinématique telles que nous les avons définies, sont souvent confondues sous le terme de porosité efficace: c'est certainement regrettable.

Voici quelques ordres de grandeur de la porosité d'interstices, sans parler de la porosité de fissures:

- Granite et gneiss non altérés:	0,02 à 1,8 %
- Quartzites:	0,8 %
- Schistes, ardoises, micaschistes:	0,5 à 7,5 %
- Calcaires, dolomies primaires:	0,5 à 12,5 %
- Dolomies secondaires:	10 à 30 %
- Craie:	8 à 37 %
- Grès:	3,5 à 38 %
- Tufs volcaniques	30 à 40 %
- Sables:	15 à 48 %
- Argiles:	44 à 53 %
- Argiles gonflantes, vases:	jusqu'à 90 %
- Sols de cultures labourés:	45 à 65 %

En règle générale, plus les grains d'une roche sont fins, plus la porosité efficace diminue, et plus la capacité de rétention augmente, ainsi que l'illustre le diagramme ci-dessous, d'après Eckis, cité par Castany et Péliissonnier, mais qu'il ne faut pas prendre à la lettre pour fixer la porosité en fonction de la taille des grains (les expériences de King par exemple s'y interprètent mal).



2.4. MESURE DE LA PRESSION DE L'EAU DANS LE SOL

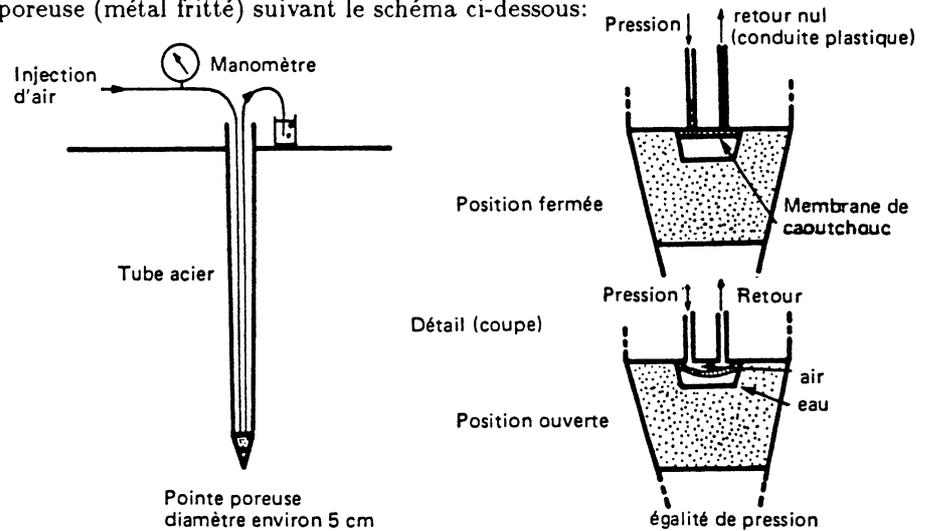
a) Dans la partie saturée

- Piézomètre:

Si le milieu est assez perméable, on fore simplement un trou dans le sol, que l'on équipera d'un tubage perforé si le trou a tendance à s'écrouler. Le niveau de l'eau dans le tube donnera la surface libre de la nappe, point où la pression est nulle (à la pression atmosphérique près). Sous la surface libre, la pression croît linéairement avec la profondeur si le système est hydrostatique.

- Pressiomètre:

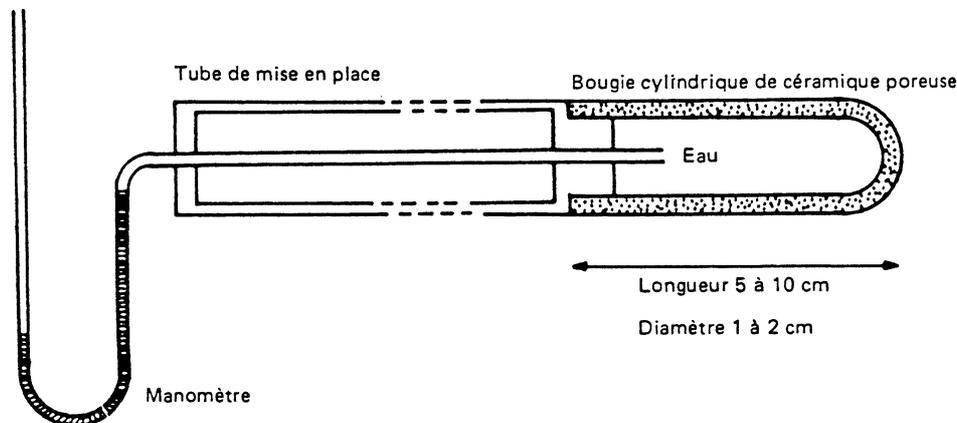
Si le milieu est peu perméable (argile ou sable argileux par exemple), on introduira (par battage) dans le sol un tube muni d'une pointe poreuse (métal fritté) suivant le schéma ci-dessous:



En injectant de l'air (pompe à pied ou bouteille) par une petite conduite plastique en surface, tout en surveillant la pression de cet air, on ouvrira la membrane en caoutchouc quand la pression de l'air sera égale à celle de l'eau, provoquant ainsi un retour d'air en surface, que l'on détecte en plongeant le tube de retour dans un verre d'eau.

b) Dans la partie non saturée

Pour mesurer la succion, dans le non saturé, on utilise une "bougie" poreuse en céramique, mise en place verticalement (ou horizontalement à partir d'un puits ou d'une tranchée) que l'on appelle "tensiomètre":



L'eau contenue dans la bougie se met en équilibre de pression, à travers la céramique poreuse, avec l'eau du sol (continuité de la phase eau à travers le sol non saturé et la bougie - qui est un milieu poreux comme un autre). On mesure donc la succion avec un manomètre. Cependant ce dispositif est limité à une succion de 800 à 900 millibars environ: au-delà, l'eau se met à bouillir dans la bougie à la température ordinaire, et le tensiomètre "désarmorce".

Pour descendre en dessous d'un bar, il faut utiliser des méthodes indirectes, telles que des blocs de plâtre équipés d'électrodes enfouis dans le sol, et dont l'eau qu'ils contiennent se met en équilibre de pression avec celle du sol. Par étalonnage de la relation pression-teneur en eau-résistivité du bloc de plâtre, on estime ainsi la succion dans le sol.

Notez que, pour établir ces étalonnages en laboratoire (sur sols réels ou blocs de plâtre) de la relation succion-teneur en eau, on augmente artificiellement la pression atmosphérique (enceinte pressurisable) pour éviter que la succion (différence de pression eau-air) n'entraîne l'ébullition.

Chapitre 3

NOTIONS DE BASE EN HYDRAULIQUE

- | | |
|--|--|
| 3.1. Equations générales de la mécanique des fluides | 3.2.3. Vitesse microscopique moyenne |
| 3.2. Equation de continuité en milieu poreux | 3.3. Charge hydraulique et cote piézométrique |
| 3.2.1. Vitesse de filtration moyenne | 3.4. Simplification et intégration des équations de Navier-Stokes en milieux poreux schématiques |
| 3.2.2. Simplification des notations | |

3.1. EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

Dans ce chapitre, nous allons principalement établir la forme de l'équation de continuité en milieu poreux. Cette équation exprime simplement que, dans un volume fermé fixe, la variation de la masse de fluide contenu dans l'unité de temps est égale à la somme algébrique des flux massiques traversant la surface du volume considéré. C'est donc le principe fondamental de conservation de la matière, le "rien ne se perd, rien ne se crée" de Lavoisier.

L'établissement de cette équation suppose que le lecteur possède quelques souvenirs de mécanique des fluides générale. Si ce n'est pas le cas, il pourra se contenter de lire le début du paragraphe 3.2.1. et les paragraphes 3.2.2., 3.2.3. et 3.3.

On montre, en mécanique et thermodynamique des fluides, que tout problème d'écoulement de fluide newtonien* se ramène à la détermination de six inconnues:

- | | |
|--------------|--|
| ρ | la masse volumique du fluide, $[ML^{-3}]$, |
| p | la pression, $[ML^{-1} T^{-2}]$, |
| θ | la température, |
| ux, uy, uz | les composantes du champ de vitesse u , inconnues elles-mêmes fonction du temps t et du point de l'espace. |

Nous allons utiliser les coordonnées d'Euler, c'est-à-dire un repère fixe par rapport au laboratoire (ou au terrain), et chercher à exprimer ces six inconnues en fonction des variables spatio-temporelles x^i et t .

Nous disposons pour cela:

- de l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la matière:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.1.1)$$

établie dans un élément de volume fixe par rapport au repère du laboratoire.

* Un fluide newtonien est un fluide isotrope, dont la pression ne dépend que des variables d'état ρ et θ , dont le tenseur de viscosité est une forme linéaire du gradient de vitesse, dont les coefficients ne dépendent que des variables d'état.

On peut encore l'écrire $\rho \operatorname{div} \vec{u} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ en coordonnées de Lagrange, c'est-à-dire en suivant le déplacement de la matière à sa vitesse u .

- des équations de Navier-Stokes, ou des équations de la dynamique, qui expriment le principe de la mécanique: $f = m\gamma$ pour des fluides visqueux dont les coefficients de viscosité sont supposés constants:

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \nabla^2 u^i = \rho \left(F^i - \frac{du^i}{dt} \right) \quad (3.1.2)$$

ζ coefficient de viscosité de volume, négligeable devant μ , $[ML^{-1} T^{-1}]$,

μ coefficient de viscosité dynamique, $[ML^{-1} T^{-1}]$,

Notez qu'on appelle le rapport $\nu = \mu/\rho [L^2 T^{-1}]$ la viscosité cinématique,

∇^2 laplacien,

F^i composante des forces à distance par unité de masse: gravité par exemple, $[LT^{-2}]$.

Les équations de Navier sont au nombre de 3, une pour chaque direction x^i de l'espace. Ceci nous donne donc quatre équations. Dans le cas général, les deux équations restantes sont d'une part l'équation de la chaleur (transport conductif et convectif de la chaleur par le fluide), d'autre part l'équation d'état du fluide donnant sa masse volumique ρ en fonction de la pression et de la température. En milieu poreux, on pourra souvent simplifier le problème en constatant que l'extrême division du milieu poreux et son énorme capacité calorifique font que les écoulements y sont en pratique toujours *isothermes*. L'inconnue température disparaît donc, et il nous suffira d'une équation supplémentaire.

- l'équation d'état du fluide, que nous prendrons de la forme:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad (3.1.3)$$

β = coefficient de compressibilité du fluide, $[M^{-1} LT^2]$.

Nous allons regarder comment transposer ces lois au milieu poreux.

3.2. EQUATION DE CONTINUITÉ EN MILIEU POREUX

3.2.1. Vitesse de filtration moyenne et équation de continuité macroscopique

Montrons tout de suite où nous voulons en venir. Soit \vec{u} la vitesse réelle du fluide dans chacun des pores du milieu poreux (on dit encore vitesse microscopique). Soit ρ la masse volumique du fluide à cette échelle et ω la porosité ponctuelle ($\omega = 1$ dans un pore, $\omega = 0$ dans un grain). A cette échelle, l'équation de continuité ordinaire rappelée ci-dessus s'applique à l'intérieur des pores.

Nous définissons alors des quantités macroscopiques, ou "moyennes", dans le milieu poreux, que nous noterons provisoirement $\langle \vec{u} \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle \omega \rangle$. Ces grandeurs macroscopiques seront définies soit par intégration dans l'espace, comme l'a proposé Marle (cf. Chap. 2.1.d) grâce à une convolution par une fonction de pondération m ; soit encore par une définition probabiliste, l'espérance mathématique de \vec{u} , ρ , ω au point x considéré, pour l'ensemble des réalisations possibles du milieu.

Nous établirons alors l'équation de continuité en milieu poreux, équivalente de (3.1.1):

$$\operatorname{div} [\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle] + \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle] = 0$$

- $\langle \rangle$ désignant la prise de moyenne

- $\langle \vec{u} \rangle$ vitesse fictive moyenne, est appelée vitesse de filtration. Nous la noterons U ultérieurement.

Notez l'apparition du terme $\langle \omega \rangle$ dans le 2^{ème} terme.

Il est important de bien saisir la signification physique des deux termes de cette équation. Elle exprime que, dans un volume fermé, la somme des flux massiques entrant est égale à la variation de la masse contenue dans ce dit volume. Bien qu'on l'exprime de façon ponctuelle, elle s'établit toujours pour un

volume élémentaire D fixe dans l'espace (nous aborderons au Chapitre 5 le cas du volume mobile dans l'espace).

Par application de la formule d'Ostrogradski *, il est évident que la divergence de $\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle$ représente le flux massique de $\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle$ à travers la surface Σ de D . Mais il faut bien voir que $\langle \vec{u} \rangle$, que nous définirons, est une vitesse moyenne fictive, c'est celle dont serait animé un fluide qui aurait, pour s'écouler, l'ensemble de l'espace, pore+grains, au lieu de n'occuper que les pores. En effet, le terme $\text{div} (\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle)$ signifie que l'on intègre $\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle$ sur la totalité de la surface Σ au domaine D , et non sur les seuls pores. C'est pourquoi on appelle $\langle \vec{u} \rangle$ vitesse de filtration.

Enfin la masse de fluide contenue dans D n'est pas $\int_D \rho dv$, mais $\int_D \rho \omega dv$, car il n'y a du fluide que dans les pores. Il est donc normal de voir apparaître $\langle \omega \rangle$ dans le 2^{ème} terme.

Nous allons maintenant établir de façon rigoureuse cette équation. Ceux qui veulent en rester là avec la théorie peuvent sauter au paragraphe b), mais regarder les deux définitions de la vitesse de filtration (cas incompressible et compressible).

- Etablissement de l'équation de continuité en milieux poreux.

Ce développement suit l'exposé de Marle (1967).

Soit \vec{u} la vitesse microscopique locale à l'intérieur des pores du milieu poreux. Pour passer à une échelle supérieure, nous allons utiliser la notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) que nous avons définie au § 2.1.d. Avant cela, convenons d'étendre le domaine de définition de \vec{u} à l'ensemble de l'espace avec, bien sûr, $\vec{u} = 0$ dans les grains.

a) Cas où le fluide et le solide sont incompressibles

L'équation de continuité à l'échelle microscopique se réduit à:

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{car } \rho \text{ est constant}$$

De plus, la vitesse \vec{u} est continue dans tout l'espace car \vec{u} est nulle aux parois en régime laminaire et définie comme nulle dans les grains.

Pour définir la vitesse macroscopique moyenne $\langle \vec{u} \rangle$, ou vitesse de filtration, nous allons intégrer la propriété locale dans l'espace, pondérée par une fonction de pondération $m(x)$ telle que:

$$\int m(x) dx = 1 \quad x: \text{coordonnées à trois dimensions}$$

l'intégrale peut être étendue soit à un certain domaine D borné, si m est à support borné, soit à tout l'espace.

Ainsi par exemple:

$$m(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi r^3} & \text{si } |x| \leq r \\ 0 & \text{si } |x| > r \end{cases}$$

m n'est autre que l'indicatrice d'une sphère de rayon r centrée à l'origine.

ou encore:
$$m(x) = \frac{1}{\sigma^3(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x$$

qui est la "loi normale" du calcul des probabilités dans l'espace à trois dimensions, σ étant l'écart type

* Formule d'Ostrogradski:

$$\int_D \text{div } \vec{V} dv = - \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

D	volume fermé de surface extérieure Σ
\vec{n}	normale extérieure à Σ
\vec{V}	vitesse continue dans D et sur Σ
$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}$	continu dans D et sur Σ

Si a est une grandeur locale, on définira alors la moyenne $\langle a \rangle$ de a au point x de l'espace par:

$$\langle a \rangle (x) = \int a(x+x')m(x')dx'$$

Il est souvent avantageux d'imposer à m d'être continue et indéfiniment dérivable, de façon à ce que $\langle a \rangle$ le soit également, même si a ne l'est pas. Ainsi, par exemple:

$$m(x) = C \exp\left(-\frac{1}{r^2 - x^2}\right) \quad \text{si } |x| \leq r$$

$$= 0 \quad \text{si } |x| > r$$

C étant choisi pour que l'intégrale de m soit bien 1.

Mais il existe une très grande latitude pour choisir m .

\vec{u} étant une grandeur vectorielle, nous pouvons définir une vitesse macroscopique $\langle \vec{u} \rangle$ en prenant la pondération par m de chacune des composantes u_i de \vec{u} :

$$\langle u_i \rangle = \int u_i(x+x')m(x')dx'$$

L'équation de continuité microscopique s'écrit:

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Multiplions par m et intégrons dans l'espace:

$$\sum_i \int \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big|_{x+x'} m(x') dx' = 0$$

\vec{u} étant continue et le domaine d'intégration (ou l'espace entier) étant fixe, les signes de dérivation et d'intégration commutent, soit:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int u_i(x+x')m(x')dx' = 0$$

soit

$$\sum_i \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{div } \langle \vec{u} \rangle = 0$$

Arrêtons-nous un instant à la signification physique de $\langle \vec{u} \rangle$, la vitesse de filtration. L'intégration de définition de $\langle \vec{u} \rangle$ est étendue à tout l'espace, même si en fait \vec{u} est nulle dans les grains du milieu poreux. Donc $\langle \vec{u} \rangle$ est une vitesse moyenne fictive, comme si la totalité de l'espace était offerte à l'écoulement (pore+solide).

Il ne faut pas confondre $\langle \vec{u} \rangle$ avec une vitesse moyenne de l'écoulement à l'intérieur des pores que nous définirons ultérieurement.

b) Cas où le fluide est compressible et l'écoulement permanent

Ceci veut dire que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que l'équation de continuité microscopique se réduit à $\text{div}(\rho u) = 0$, et que de plus le milieu poreux est immobile. Commençons par définir une masse volumique macroscopique $\langle \rho \rangle$. La masse volumique microscopique ρ n'étant définie que dans les pores, il nous faut de même étendre sa définition à tout l'espace, en convenant que $\rho = 0$ dans les grains. Mais attention, ρ est maintenant discontinue à l'interface solide-liquide.

De plus, si nous définissions simplement $\langle \rho \rangle$ par la convolution de ρ par la fonction de pondération m , nous aurions une certaine inconsistance parce que $\langle \rho \rangle$ moyen serait très différent de ρ local, même dans le cas où ρ local serait uniforme dans les pores. Le problème vient de ce que ρ serait, dans la convolution, en quelque sorte pondéré également par la porosité.

On préfère donc définir d'abord la porosité moyenne:

$$\langle \omega \rangle = \int \omega(x+x')m(x')dx' \quad \text{où } \omega = \begin{cases} 0 & \text{dans un grain}^* \\ 1 & \text{dans un pore}^* \end{cases}$$

Ensuite, la masse volumique macroscopique sera définie par:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\langle \omega \rangle} \int \rho(x+x')m(x')dx' \quad (\text{si } \rho = \text{cst, alors } \langle \rho \rangle = \rho)$$

Nous pourrions enfin garder la même définition pour la vitesse de filtration que celle du paragraphe précédent; cependant, cette définition suppose implicitement que le fluide est incompressible. En effet, s'il ne l'est pas, faire l'addition (ou la moyenne) de vitesse n'a pas de signification physique. Seule la masse est une grandeur additive (c'est-à-dire vérifiant une équation de continuité).

Nous définirons donc la vitesse de filtration $\langle \vec{u} \rangle$ à partir du flux massique $\rho \vec{u}$ et de la masse volumique moyenne $\langle \rho \rangle$:

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \int \rho(x+x')u_i(x+x')m(x')dx' \quad (3.2.1)$$

si ρ est constant, cette définition coïncide avec la précédente.

Bien que ρ soit continu dans l'espace, le produit $\rho \vec{u}$ l'est tant que le milieu poreux est immobile. Nous pourrions donc de même permuter les signes de sommation et de dérivation et écrire l'équation de continuité macroscopique:

$$\int \text{div}(\rho \vec{u}) m(x')dx' = \text{div} \left[\int \rho \vec{u} m(x')dx' \right] = 0$$

soit, d'après (3.2.1):

$$\text{div} [\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle] = 0$$

c) Cas où le fluide est compressible, l'écoulement fonction du temps et le milieu déformable

Nous garderons pour $\langle \omega \rangle$, $\langle \rho \rangle$ et $\langle \vec{u} \rangle$ les mêmes définitions que ci-dessus, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \int \omega(x+x')m(x')dx' & \text{avec } \omega &= \begin{cases} 0 & \text{dans un grain} \\ 1 & \text{dans un pore} \end{cases} \\ \langle \rho \rangle &= \frac{1}{\langle \omega \rangle} \int \rho(x+x')m(x')dx' & \text{avec } \rho &= \begin{cases} 0 & \text{dans un grain} \\ \rho & \text{du fluide dans un pore} \end{cases} \\ \langle u \rangle &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \int \rho(x+x')u(x+x')m(x')dx' & \text{avec } \vec{u} &= \begin{cases} 0 & \text{dans un grain} \\ \vec{u} & \text{du fluide dans un pore} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous utiliserons l'équation de continuité complète et l'intégrerons dans l'espace en la pondérant par m :

* Il s'agit ici d'une porosité efficace non plus au sens cinématique, c'est-à-dire de l'eau qui peut circuler, mais au sens de la compressibilité: quand on fait varier p , on veut connaître la fraction du milieu poreux qui contient de l'eau compressible. N'en est éventuellement exclue que la pellicule d'eau liée fixée au solide, elle-même déjà très fortement comprimée, et que nous supposons faire partie des grains. En pratique, on utilisera la porosité totale ω .

$$\int \left[\operatorname{div}(\rho u) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]_{x+x'} m(x') dx' = 0$$

Cette intégrale est bien nulle car, par définition, le terme entre crochets doit être nul dans les pores, et les définitions de ρ et \vec{u} dans les grains font qu'il est également nul dans les grains. Le fait que les dérivées d'espace ne soient pas définies sur l'interface Σ_1 entre pores et grains est sans conséquence sur le calcul de l'intégrale de volume, car Σ_1 forme un ensemble de mesure nulle.

Bien que le résultat final soit simple, le calcul est plus délicat car, cette fois-ci, les signes de dérivation et d'intégration ne vont plus commuter simplement.

Le problème vient de ce que, si le milieu est comprimé, la masse volumique de l'eau va varier, mais le milieu poreux lui-même, soumis à ces pressions, va se déformer. La porosité va donc varier, et la frontière liquide-solide Σ_1 va se déplacer avec une vitesse que nous appellerons \vec{u}_σ . Ces vitesses sont bien sûr très faibles, et le plus souvent négligeables. Mais nous cherchons ici à établir de façon rigoureuse les équations de base.

Ce déplacement a pour conséquence que ni ρ , ni $\rho \vec{u}$ ne sont continues dans l'espace. On montre alors que sommation et dérivation ne commutent que si la dérivation est prise au sens des distributions, et non au sens ordinaire (voir Marle, 1967, ou Schwartz, 1961).

Etudions maintenant le terme $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{x+x'} m(x') dx'$

Sans parler de distribution, nous allons nous servir de la règle de Leibnitz* (dérivation sous le signe somme) pour évaluer notre intégrale.

D'après la définition de $\langle \rho \rangle$, nous pouvons écrire:

$$\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle = \int \rho(x+x') m(x') dx'$$

Supposons que m est à support borné, et soit D le domaine, centré en x , dans lequel m n'est pas nul; nous appellerons Σ la surface extérieure de D . Comme ρ est nul dans les grains, on peut même limiter l'intégration au domaine D_1 occupé par le fluide, et qui est limité par sa surface extérieure Σ et l'interface fluide-solide, que nous appellerons Σ_1 . Dérivons maintenant l'expression ci-dessus par rapport au temps:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x+x' \in D_1} \rho(x+x') m(x') dx' \right]$$

Comme D_1 varie au cours du temps (le milieu poreux se déforme), la règle de Leibnitz nous donnera deux termes dans la dérivation:

- la dépendance du temps de ρ ,
- la variation au cours du temps du volume d'intégration D_1 .

Le premier est simplement $\int_{D_1} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x+x')] m(x') dx'$

qui est précisément celui que nous cherchions à estimer au début de ce paragraphe.

Le deuxième terme peut être évalué en remarquant que le volume balayé par un élément de surface d_σ appartenant à l'interface fluide-solide Σ_1 pendant un temps dt est:

* Règle de Leibnitz

Si $f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \psi(x, y) dy$

où $\begin{cases} \psi(x, y) & \text{est continue en } x \text{ et } y \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \text{existe et est continue} \\ a \text{ et } b & \text{sont dérivables} \end{cases}$

alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{db}{dx} \psi[x, b(x)] - \frac{da}{dx} \psi[x, a(x)] + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) dy$

$$-\vec{u}_\sigma \vec{n} dt$$

\vec{u}_σ étant la vitesse de déplacement de l'interface, et \vec{n} la normale à cet interface, orientée vers le fluide.

La variation du volume D_1 par unité de temps est donc l'intégrale de ce terme sur la surface Σ_1 (la surface extérieure Σ de D_1 étant fixe):

$$-\int_{x+x' \in \Sigma_1} \rho(x+x') \vec{u}_\sigma(x+x') \cdot \vec{n}(x+x') m(x') dx'$$

Notons que ce terme n'intervient que parce que ρ est discontinu sur Σ_1 : si ρ y était nul, l'intégrale disparaîtrait.

Nous pouvons donc écrire:

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{x+x'} m(x') dx' = \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle] + \int_{\Sigma_1} \rho \vec{u}_\sigma \cdot \vec{n} m(x') dx'$$

Regardons maintenant le deuxième terme, $\int \operatorname{div}(\rho u) m dx'$

Comme l'interface Σ_1 entre fluide et solide se déplace, la vitesse du fluide à cet interface n'est nulle qu'en vitesse relative, par rapport à la vitesse de l'interface*:

$$\text{sur } \Sigma_1 : \vec{u} - \vec{u}_\sigma = 0 \quad \text{soit } \vec{u} = \vec{u}_\sigma$$

\vec{u} est donc discontinu de part et d'autre de Σ_1 , si bien qu'il faut aussi faire intervenir un terme supplémentaire sur Σ_1 . Nous allons calculer une dérivée d'espace de $\langle \rho \rangle \langle u_i \rangle$. Intégrons comme plus haut dans un domaine borné D , et soit D_1 le domaine occupé par le fluide dans D ; Σ_1 est l'interface fluide-solide.

D'après la définition de la vitesse de filtration (3.2.1):

$$\langle \rho \rangle \langle u_i \rangle = \int \rho u_i \Big|_{x+x'} m(x') dx'$$

Dérivons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \rho \rangle \langle u_i \rangle] &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x+x' \in D} \rho u_i \Big|_{x+x'} m(x') dx' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x+x' \in D_1} \rho u_i \Big|_{x+x'} m(x') dx' \quad \text{car } \rho u_i = 0 \text{ dans } D - D_1 \end{aligned}$$

Changeons de variable:

$$\begin{aligned} x'' &= x + x' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x'' \in D_1} \rho u_i \Big|_{x''} m(x'' - x) dx'' \end{aligned}$$

mais maintenant, seul m est fonction de x . Si nous remarquons que:

* En toute généralité, la relation de conservation de la masse qui existe à l'interface dans un milieu biphasique est plus riche: elle s'écrit:

$$\rho_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{n} - \vec{u}_\sigma \cdot \vec{n}) - \rho_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{n} - \vec{u}_\sigma \cdot \vec{n}) = 0$$

1 et 2 désignant chaque phase, n étant la normale à l'interface Σ entre 1 et 2, et \vec{u}_σ la vitesse de Σ . Cette règle suppose que cet interface est une surface singulière, et néglige les phénomènes d'interface tels que la tension superficielle. Elle permet l'échange de matière à l'interface (par exemple fusion de la glace, réaction chimique, ...). Ici, il est évident que la vitesse du solide u_2 sur Σ est égale à u_σ , donc de même $\vec{u}_1 = \vec{u}_\sigma$. Voir Slattery, 1972.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m(x'' - x)}{\partial x_i} &= -\frac{\partial m(x'' - x)}{\partial x''_i} && \text{alors:} \\
&= -\int_{x'' \in D_1} \rho u_i \Big|_{x''} \frac{\partial m(x'' - x)}{\partial x_i} dx'' \\
&= -\int_{x'' \in D_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x''_i} \left[\rho u_i \Big|_{x''} m(x'' - x) \right] - \frac{\partial}{\partial x''_i} \left[\rho u_i \Big|_{x''} \right] m(x'' - x) \right\} dx''
\end{aligned}$$

De même, l'interface Σ_1 étant un ensemble de mesure nulle, le fait que le gradient n'y soit pas défini est sans conséquence sur le calcul de l'intégrale. Transformant le premier terme par la formule d'Ostrogradski:

$$\int_{D_1} \frac{\partial}{\partial x''_i} \left[\rho u_i \Big|_{x''} m(x'' - x) \right] dx'' = \int_{\Sigma_1} \rho u_i \Big|_{x''} m(x'' - x) n_i dx''$$

n_i étant la composante dans la direction i de la normale à Σ_1 orientée du solide vers le fluide. Notez que l'intégrale est limitée à Σ_1 et non à la surface extérieure de D_1 car si D est assez grand, m y est nul.

On peut maintenant revenir à la variable x initiale, par le changement de variable $x'' = x + x'$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \rho \rangle \langle u_i \rangle] = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho u_i \Big|_{x+x'} \right] m(x') dx' + \int_{\Sigma_1} \rho u_i \Big|_{x+x'} m(x') n_i dx'$$

soit, finalement:

$$\int_D \operatorname{div} (\rho \vec{u}) \Big|_{x+x'} m(x') dx' = \operatorname{div} [\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle] - \int_{\Sigma_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \Big|_{x+x'} m(x') dx'$$

Le fait que D soit borné est sans conséquence sur la démonstration, qui reste générale.

En regroupant les deux termes de l'équation de continuité, il vient:

$$\operatorname{div} [\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle] + \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle] + \int_{\Sigma_1} \rho (\vec{u}_\sigma - \vec{u}) \cdot \vec{n} m(x') dx' = 0$$

mais, comme sur Σ_1 , nous avons montré que $\vec{u} = \vec{u}_\sigma$, il ne subsiste que:

$$\boxed{\operatorname{div} [\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle] + \frac{\partial}{\partial t} [\langle \rho \rangle \langle \omega \rangle] = 0} \quad (3.2.2)$$

Notons que l'on pourrait également définir $\langle \omega \rangle$, $\langle \rho \rangle$, $\langle u \rangle$ au sens des fonctions aléatoires, comme les espérances mathématiques, au point x , de l'ensemble des valeurs prises par l'ensemble infini des réalisations possibles du milieu. Les signes de dérivations doivent être alors pris au sens des distributions pour qu'ils commutent avec les signes d'espérances:

$$\frac{\partial}{\partial x} [E(a(x, t))] = E \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x, t) \right]$$

3.2.2. Simplification des notations; terme source

Pour ne pas alourdir les écritures, nous allons maintenant laisser tomber le signe " $\langle \rangle$ " pour ρ , ω , et noter $\vec{U} = \langle \vec{u} \rangle$ la vitesse de filtration tout en nous souvenant que ces grandeurs sont définies, en milieu poreux, pour l'opération "prise de moyenne" que nous avons amplement commentée.

Nous allons cependant rajouter un terme à l'équation de continuité. En effet, cette équation exprime la conservation de la matière au sein d'un volume fermé. Mais, en hydrogéologie, il faut bien souvent lui ajouter un terme source, correspondant aux prélèvements (ou apports) d'eau que l'on peut réaliser dans le milieu (forage par exemple). Nous définirons le terme source q qui représentera le débit volumique de fluide

prélevé (ou apporté s'il est négatif) par unité de volume en chaque point. Le débit massique prélevé sera donc ρq , q étant défini à l'échelle macroscopique. Ce terme s'ajoute à l'équation de continuité qui s'écrira, si on néglige la déformation du milieu:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \rho q = 0 \quad (3.2.3)$$

3.2.3. Vitesse microscopique moyenne

A partir de la vitesse de filtration \vec{U} , on peut définir une "vitesse microscopique moyenne" du fluide en disant simplement que \vec{u} est nulle dans les grains. Soit Σ une section du milieu poreux, et soit ω_{cs} la porosité cinématique de surface sur Σ :

$$\omega_{cs} = \frac{\text{surface des pores efficaces}}{\text{surface totale de la section}}$$

on définira la vitesse microscopique moyenne par:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{U}}{\omega_{cs}}$$

Cette vitesse n'a cependant pas grande signification physique, contrairement à \vec{U} qui, par définition, vérifie l'équation de continuité.

En pratique, on suppose généralement que le milieu poreux est isotrope du point de vue de la répartition des porosités sur une section, et on admet que $\omega_{cs} = \omega_c$ bien qu'en réalité, $\omega_{cs} < \omega_c$ généralement. La vitesse microscopique moyenne (ou vitesse moyenne réelle dans les pores) est donc:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{U}}{\omega_c} \quad \text{où } \omega_c \text{ est la porosité cinématique}$$

3.3. CHARGE HYDRAULIQUE ET COTE PIEZOMETRIQUE

On définit, dans les cours d'hydraulique, la charge hydraulique en un point M d'un fluide incompressible et soumis à la seule gravité par la relation:

$$h = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$$

u étant la vitesse réelle du fluide au point M , dont la cote est z (comptée positivement vers le haut). On sait de plus (théorème de Bernouilli) que la charge ne peut que décroître dans le sens de l'écoulement, et que si un fluide est immobile, sa charge est constante dans l'espace.

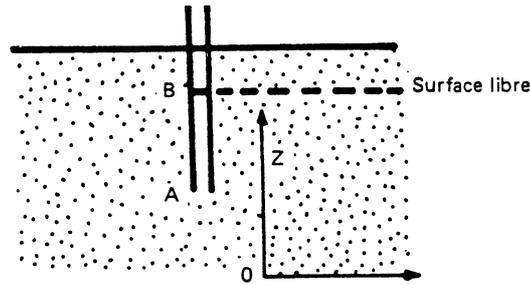
En milieu poreux, les vitesses réelles sont toujours très lentes, et on est en droit de négliger le terme de charge dynamique $\frac{u^2}{2g}$, si bien que la charge se résume à la charge statique, ou cote piézométrique:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.3.1)$$

La cote piézométrique est donc confondue avec la charge. La valeur de la charge est **fonction, bien sûr**, de l'origine choisie sur l'axe z .

On exprime généralement les charges par rapport au nivellement général (NGF) comptées au-dessus du niveau moyen des mers, comme les altitudes topographiques.

Si nous voulons mesurer la charge en un point A d'un milieu poreux, il suffit de forer un trou et d'y descendre un tube ouvert à ses deux extrémités: après stabilisation, la cote z_B atteinte par l'eau dans le tube sera égale à la charge h au point d'ouverture inférieur du tube:



On appelle piézomètre ce genre d'ouvrage. La cote z_B est égale à la charge dans le piézomètre en B , qui est la même que celle du point A , car le fluide est immobile dans le tube du piézomètre:

$$h_A = \frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{P_B + \rho g(z_B - z_A)}{\rho g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + z_B = h_B$$

Comme on choisit toujours la pression atmosphérique comme pression nulle de référence, on a bien $h_A = h_B = z_B$.

Dans une nappe de surface directement alimentée par la pluie, si le fluide était immobile, la charge serait la même en tout point du milieu poreux. Donc la cote z_B atteinte dans le piézomètre définirait la "surface libre" de la nappe, c'est-à-dire la limite (où la pression de l'eau est nulle) séparant le milieu poreux saturé du milieu non saturé.

Si, dans un milieu saturé, la nappe s'écoule horizontalement et que la charge reste la même sur une verticale, la cote de la surface libre reste toujours celle mesurée par le piézomètre quelle que soit sa profondeur. Il n'en est plus de même si l'écoulement n'est pas horizontal, la charge varie avec la profondeur du piézomètre, et la surface libre est définie par la cote obtenue quand le piézomètre commence à pénétrer dans le milieu saturé.

Dans la pratique, on crépine souvent les piézomètres sur toute leur hauteur (perforations, fentes, ...), et on mesure ainsi une "charge moyenne" dans la nappe.

Pour tenir compte de la compressibilité du fluide, on définit parfois la charge par:

$$h = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)g} \quad (3.3.2)$$

p_0 = pression à l'origine de l'axe z ,

p = pression au point de cote z .

(voir Remson et al.)

1971

Nous n'utiliserons pas cette formulation ici.

3.4. SIMPLIFICATION ET INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN MILIEUX POREUX SCHEMATIQUES

Les équations de Navier-Stokes sont en pratique inapplicables telles quelles en milieu poreux, car on ne connaît pas assez précisément ce qui se passe au niveau microscopique dans les pores quant aux pressions et aux vitesses. Il faut donc trouver une loi macroscopique valable à l'échelle du domaine élémentaire de milieu poreux, reliant pression, vitesse et forces extérieures.

Cette loi est une loi expérimentale, la loi de Darcy, que nous étudierons par la suite (Chap. 4).

Nous allons cependant simplifier les lois de Navier-Stokes en nous plaçant dans le cas d'écoulements lents (laminaires) permanents de fluide incompressible. Une fois simplifiées, nous les appliquerons à deux cas géométriques simples, l'écoulement entre deux plaques rapprochées et dans un tube cylindrique, selon l'exemple emprunté à Houpeurt.

Nous obtiendrons alors une loi macroscopique que nous pourrons comparer à la loi expérimentale de Darcy.

Notre but n'est pas de démontrer la loi de Darcy, qui est une loi phénoménologique qu'il faut admettre. Il est de s'appuyer sur des considérations théoriques pour pouvoir généraliser la loi de Darcy à partir de l'expérience élémentaire.

Signalons cependant l'existence des travaux de Matheron et Marle déjà cités, qui portent sur la justification de la loi de Darcy à partir de l'intégration dans un milieu réel des équations de Navier. Matheron a montré, en particulier, que la loi de Darcy découle de la linéarité des équations de Navier, non de leur forme.

- Simplifications

Pour les écoulements permanents, nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = 0$$

et, en utilisant l'équation de continuité ordinaire:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si, de plus, le fluide est incompressible, cette équation se réduit à:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à:

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \mu \nabla_2 u^i - \rho F^i = 0 \quad (3.4.1)$$

Nous les intégrerons dans trois cas simples.

a) Mouvement parallèle isotherme et permanent d'un fluide visqueux incompressible dans une fissure d'épaisseur e , sans action des forces extérieures.

La fissure est supposée s'étendre indéfiniment dans le plan horizontal x, y et son ouverture e être orientée suivant z .

L'écoulement parallèle se fait dans la direction x : la vitesse a une seule composante u_x . Il est évident que la vitesse u_x ne dépend alors ni de x , ni de y , mais seulement de z :

$$u_y = u_z = 0$$

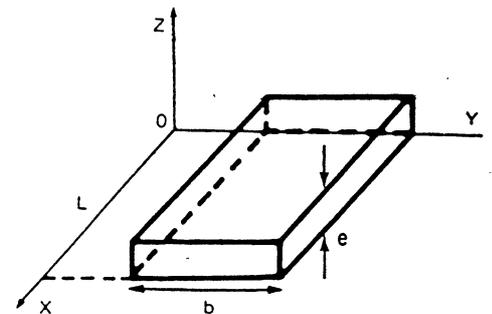
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Les équations de Navier-Stokes (3.4.1.) se réduisent alors, sans action des forces extérieures ($F^i = 0$) à:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.4.4)$$



Isolons par la pensée une longueur L de fissure suivant x , suivant une largeur b suivant y , et p ne dépendant que de x , fixons des conditions aux limites:

$$\begin{aligned} p &= p_1 && \text{pour } x = 0 \\ p &= p_2 && \text{pour } x = L \end{aligned} \quad p_2 < p_1$$

Si nous avons fait intervenir la gravité comme force extérieure, la dernière équation de Navier-Stokes (3.4.4) serait:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

et p serait fonction de z . Nous n'en tenons pas compte ici pour simplifier l'exposé (voir plus loin § c)).

La 1^{ère} équation de Navier-Stokes (3.4.2) ne dépend que de x au 1^{er} membre, et que de z dans le 2^{ème}, toutes deux variables indépendantes: le seul moyen d'assurer l'égalité de ces deux quantités est qu'elles demeurent chacune de leur côté égales à la même constante C .

L'équation (3.4.2) est donc remplacée par:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = C \quad \text{et} \quad \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \mu \frac{d^2 u_x}{dz^2} = C$$

L'intégration de ces deux équations conduit à:

$$\begin{cases} p &= p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x \\ u_x &= \frac{1}{\mu} C \frac{z^2}{2} + C'z + C'' \end{cases}$$

comme pour $z = 0$ et $z = e$, on doit avoir $u = 0$, il vient:

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{p_2 - p_1}{L} (z^2 - ez) \quad (\text{profil parabolique de la vitesse})$$

Calculons le débit q à travers la fissure pour la largeur b :

$$\begin{aligned} q &= \int_0^e b u_x dz \\ q &= b e \frac{e^2}{12\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} \end{aligned}$$

Si n fissures parallèles existent sur une hauteur l de terrain par ailleurs imperméable, la porosité de celui-ci sera alors:

$$\omega = \frac{ne}{l}$$

La section totale de terrain A sera bl , et donnera le débit $Q = nq$:

$$Q = A \frac{\omega e^2}{12} \frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} \quad (3.4.5)$$

Les équations de Navier-Stokes et Poisson conduisent donc à trouver que le débit Q est proportionnel à la section de passage A et au gradient de pression $\frac{p_1 - p_2}{L}$ et inversement proportionnel à la viscosité μ , le coefficient de proportionnalité propre au milieu considéré étant ici $\frac{\omega e^2}{12}$.

b) Écoulement dans un tube circulaire de rayon r (formule de Poiseuille)

Utilisant la symétrie radiale en faisant apparaître des coordonnées polaires ayant pour axe la direction x de l'écoulement, la première équation de Navier-Stokes écrite dans le cas de la fissure devient:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

L'intégration conduit à :

$$q = \frac{\Pi r^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{L}$$

Un milieu poreux constitué d'une matrice imperméable percée de n canaux circulaires de rayon r , tous parallèles entre eux pour une surface totale A perpendiculaire à la direction des canaux a une porosité :

$$\omega = \frac{n\Pi r^2}{A}$$

Le débit total du milieu poreux est alors $Q = nq$, soit :

$$Q = A \frac{\omega r^2}{8} \frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} \quad (3.4.6)$$

expression absolument analogue à l'expression (3.4.5) du débit du milieu fissuré, le coefficient de proportionnalité étant ici $\frac{\omega r^2}{8}$ au lieu de $\frac{\omega e^2}{12}$.

Ces deux calculs suggèrent - mais ne démontrent pas - que le débit Q traversant une section droite A de milieu poreux, pour un fluide incompressible de viscosité μ , sous l'effet d'un gradient de pression $\frac{dp}{dx}$, sera de la forme :

$$Q = A \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

k étant le coefficient de proportionnalité propre au milieu poreux considéré.

Nous verrons que c'est effectivement le résultat trouvé expérimentalement par Darcy.

c) Introduction des forces extérieures

Si nous voulons tenir compte des forces extérieures dans les équations de Navier-Stokes, par exemple la pesanteur, nous allons orienter la fissure plane parallèle dans le sens vertical dans le plan (yz) . Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \rho g$$

ce qui conduit, après intégration de la même façon, à :

$$\begin{cases} p &= p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} L \\ u_z &= 12\mu \left[\frac{p_2 - p_1}{L} + \rho g \right] (x_0 - ex) \end{cases} \quad (3.4.7)$$

On en conclut que la force de pesanteur ρg joue le même rôle que le gradient de pression $\frac{dp}{dz}$ auquel il convient de l'ajouter. Le débit s'écoulant à travers le milieu fissuré devient :

$$Q = A \frac{\omega e^2}{12} \frac{1}{\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g \right) \quad ((p_1 - p_2)/L - \rho g)$$

Si nous calculons la vitesse de filtration définie plus haut comme celle d'un fluide auquel toute la section A du milieu fissuré serait offerte à l'écoulement, nous obtenons :

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{\omega e^2}{12 \mu} \frac{1}{L} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g \right)$$

En généralisant pour toute direction de l'espace:

$$\vec{U} = -\frac{\omega e^2}{12 \mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \quad (3.4.8)$$

$\overrightarrow{\text{grad}} z$ est un vecteur de coordonnées (0,0,1), l'axe z étant vertical orienté vers le haut. Le signe moins vient de ce que les fluides s'écoulent des pressions élevées vers les pressions faibles, ou du haut vers le bas.

Comme le fluide est supposé incompressible, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z &= \rho g \left[\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \right] \\ &= \rho g \overrightarrow{\text{grad}} h \end{aligned}$$

$h = \frac{p}{\rho g} + z$ étant la charge hydraulique que nous avons définie en (3.3.1), soit:

$$\vec{U} = -\frac{\omega e^2}{12 \mu} \rho g \overrightarrow{\text{grad}} h$$

Le rôle de la pression est remplacé par celui de la charge h .

Mais il faut bien voir qu'au niveau des équations de Navier-Stokes elles-mêmes, on peut associer gradients de pression et forces extérieures:

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \rho F^i$$

soit, si les forces F^i dérivent d'un potentiel comme la pesanteur: $\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z$, mais que la définition d'un potentiel unique $\frac{p}{\rho g} + z$ suppose que le fluide est incompressible, ce qui n'est pas toujours exact en milieu poreux. Nous utiliserons alternativement les deux formes.

Chapitre 4

LOI DE DARCY

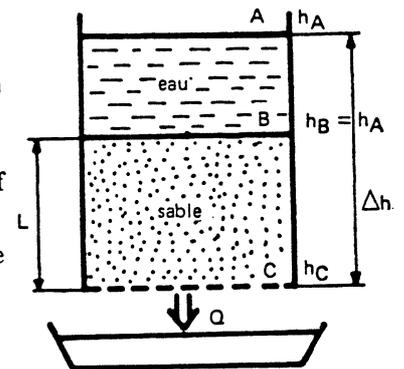
- 4.1. L'expérience de Darcy, perméabilité et transmissivité
- 4.2. Limite de validité de la loi de Darcy
- 4.3. Mesure de la perméabilité sur échantillon
- 4.4. Approche probabiliste de la perméabilité et variabilité spatiale
- 4.5. Mouvement de l'eau sous l'action d'autres champs de force

4.1. L'EXPERIENCE DE DARCY, PERMEABILITE ET TRANSMISSIVITE

Le chevalier Henri Darcy, étudiant les fontaines de la ville de Dijon vers 1856, établit expérimentalement que le débit d'eau s'écoulant à travers un massif de sable peut se calculer:

$$Q = KA \frac{\Delta h}{L} \quad (4.1.1)$$

- A est la section du massif sableux;
- Δh est la perte de charge de l'eau entre le sommet et la base du massif sableux;
- K est une constante dépendant du milieu poreux, baptisée coefficient de perméabilité par les hydrogéologues ou mobilité par les mécaniciens;
- L est l'épaisseur du massif sableux.



En divisant les deux membres par A , on fait apparaître la vitesse U fictive du fluide à la sortie du massif, comme si toute la section du massif était soumise à l'écoulement. C'est ce que nous avons appelé la *vitesse de filtration*.

$$U = \frac{Q}{A}$$

De plus, si l'on note $i = \frac{\Delta h}{L}$ la perte de charge par unité de longueur de milieu poreux traversé, dénommée encore *gradient hydraulique*, on obtient:

$$U = Ki \quad (4.1.2)$$

qui est l'expression la plus simple de la loi de Darcy.

a) Perméabilité intrinsèque

En se basant sur les équations aux dimensions et par vérification expérimentale, on trouve que la constante K varie en fait en fonction inverse de la viscosité dynamique du fluide μ .

Nous savons, d'autre part, d'après les calculs réalisés à partir des équations de Navier-Stokes, que les véritables causes du déplacement du fluide en milieu poreux sont les gradients de pression d'une part, et les forces extérieures d'autre part, soit ici la gravité comme dans l'équation (3.4.8).

La loi de Darcy doit donc s'exprimer sous la forme générale:

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \quad (4.1.3)$$

que nous admettrons pour les écoulements permanents et non permanents de fluides compressibles. Notez que U étant une grandeur macroscopique, il en est de même de μ , ρ , p , au sens des moyennes $\langle \rangle$ que nous avons définies au chapitre 3.*

La perméabilité intrinsèque k se rapporte au milieu poreux indépendamment des caractéristiques du fluide. Elle n'est définie qu'à l'échelle macroscopique.

Sa dimension, à partir de l'équation (4.1.3) est celle d'une surface $[L^2]$:

$$[k] = \frac{[Q][\mu]}{[A][pL^{-1}]} = \frac{[L^3T^{-1}][ML^{-1}T^{-1}]}{[L^2][ML^{-2}T^{-2}]} = [L^2]$$

On l'exprime cependant en:

DARCE, qui vaut 10^{-12} m^2 (norme AFNOR).

DARCY, qui vaut $0,987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. C'est la perméabilité d'un milieu qui, sous la différence de pression d'une atmosphère (760 mm Hg) par cm, laisse s'écouler à travers une section de 1 cm^2 un débit de $1 \text{ cm}^3/\text{s}$, pour un fluide de viscosité 1 centipoise.

En pratique, les pétroliers utilisent le MILIDARCY (10^{-3} DARCY) car les perméabilités courantes des gisements se situent généralement entre un et quelques milliers de milidarcy. (note md)

b) Perméabilité des hydrogéologues

Pour établir la relation entre la perméabilité intrinsèque k et le coefficient de perméabilité K utilisé par les hydrogéologues, il faut exprimer le débit en fonction du gradient de charge hydraulique $\frac{\Delta h}{L} = -\text{grad } h$.

En supposant le fluide incompressible, nous pouvons écrire (4.1.3) sous la forme:

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} (p + \rho g z)$$

soit encore, en remarquant que la charge h est définie par: $h = \frac{p}{\rho g} + z$ et en faisant sortir ρg du gradient:

$$\vec{U} = -\frac{k\rho g}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} h \quad (4.1.4)$$

En comparant (4.1.2) et (4.1.4), on en déduit que:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu}$$

Notons que les deux formes de la loi de Darcy:

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} [\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z] = -K \overrightarrow{\text{grad}} h$$

sont strictement équivalentes, mêmes pour les fluides compressibles, si l'on adopte pour définition de la charge:

* On peut montrer en particulier que la loi de Darcy s'applique au gradient de la pression moyenne, $\text{grad} \langle p \rangle$, et non à la moyenne du gradient de pression, $\langle \text{grad } p \rangle$. Voir Marle, 1967.

$$h = z + \int_0^p \frac{dp}{\rho g}$$

que nous avons déjà citée plus haut. Nous ne nous en servons cependant pas.

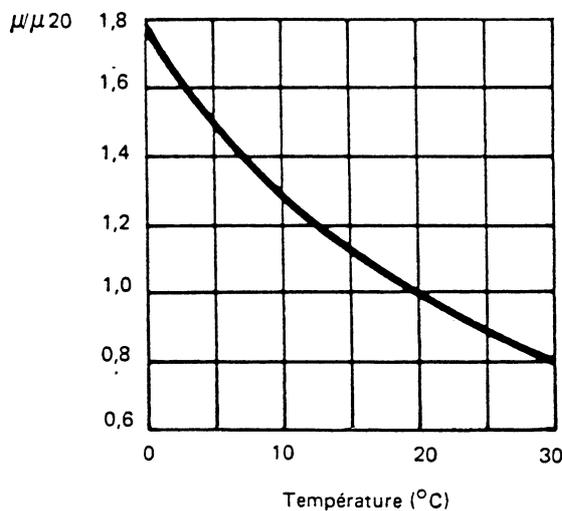
La dimension de K est celle d'une vitesse:

$$[K] = \frac{[L^2][ML^{-3}][LT^{-2}]}{[ML^{-1}T^{-1}]} = [LT^{-1}]$$

Elle s'exprime généralement en m/s.

Les coefficients de perméabilité des couches aquifères évoluent entre 10^{-9} et 10^{-2} m/s.

Ce coefficient de perméabilité des hydrogéologues est fonction du fluide, ce qui n'est pas très gênant car on s'intéresse toujours à l'eau, mais aussi de sa viscosité. Or la viscosité varie sensiblement avec la température. La figure suivante donne la variation de la viscosité de l'eau avec la température, ramenée à la viscosité mesurée à 20° , qui vaut 1,002 centipoise, ou encore $1,002 \cdot 10^{-3}$ Newton.s/m² (ou kg/m.s).



1 centipoise = 10^{-3} Pa.s

Les valeurs sont mesurées à la pression atmosphérique.

Température °C	Viscosité μ en centipoises à la pression atmosphérique
0°	1,787
10°	1,310
20°	1,002
40°	0,653
60°	0,466
80°	0,355
100°	0,282

Malgré l'hypothèse d'isothermie du milieu poreux que nous avons faite, il faut y prendre garde pour les nappes très superficielles (nappes alluviales par exemple) où les variations climatiques entre l'hiver et l'été engendrent des variations non négligeables de la perméabilité: elle est réduite de 40% si la température de l'eau passe de 25° à 5° . Nous en reparlerons également pour les problèmes de géothermie.

Pour comparer perméabilité intrinsèque et perméabilité des hydrogéologues, il est bon d'avoir à l'esprit la correspondance suivante: pour de l'eau à 20°C , 1 milidarcy donne:

$$0,987 \frac{10^{-15} \times 10^3 \times 9,81}{1,002 \times 10^{-3}} = 0,966 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

soit 1 milidarcy proche de 10^{-8} m/s pour de l'eau à 20°C , ou encore 1 milidarcy $\sim 10^{-15} \text{ m}^2$

c) Perméabilité et porosité

D'après l'analogie de l'écoulement en milieu fissuré ou en conduite circulaire, on a cherché à relier perméabilité et porosité, ou dimension des pores.

Loi de Darcy	$\vec{U} = -\frac{k\rho g}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} h$
Milieu fissuré	$\vec{U} = -\frac{\omega e^2 \rho g}{12\mu} \overrightarrow{\text{grad}} h$
Milieu tubulaire	$\vec{U} = -\frac{\omega r^2 \rho g}{8\mu} \overrightarrow{\text{grad}} h$

On pourrait donc penser relier k à $\frac{\omega e^2}{12}$ ou $\frac{\omega r^2}{8}$, malheureusement, toutes les tentatives faites dans ce sens ont conduit à des résultats médiocres. Les formules empiriques les plus connues sont celles:

- de KOSENY-CARMAN:
$$k = \frac{\omega^3}{5S_0^2(1-\omega)^2}$$

où S_0 est la surface exposée au fluide par volume unité de milieu *solide* (et non pas poreux), et ω la porosité totale.

- de HAZEN:
$$\log_{10} k = 2 \log_{10} d_{10} - 3$$

où d_{10} est le "diamètre efficace" des grains du sol (voir § 2.1.e), k est en cm^2 et d_{10} en cm.

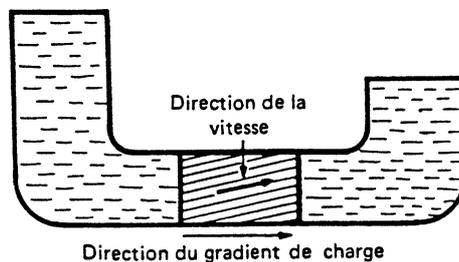
- de BRETJINSKI pour les sables:
$$\omega = 0,117\sqrt[3]{K} \quad (K \text{ en m/j}).$$

d) Tenseur de perméabilité

L'expérience du perméamètre de Darcy est réalisée en observant un écoulement unidirectionnel. Quand nous sommes passés de $U = Ki$ à $\vec{U} = -K \overrightarrow{\text{grad}} h$, nous avons déjà admis que l'on pouvait généraliser la loi pour l'espace à trois dimensions. Et ce faisant, nous avons implicitement admis que le coefficient de perméabilité K , ou encore la perméabilité intrinsèque k , étaient des propriétés *isotropes* du milieu poreux, indépendantes de la direction de l'espace.

Or, on sait a priori qu'il n'en est pas ainsi. Par exemple, les couches sédimentaires sableuses ou argilo-sableuses ont, du fait même de leur stratification, une perméabilité horizontale bien supérieure à leur perméabilité verticale.

Il en est de même des milieux alluviaux formés généralement de couches ou lentilles alternées de sables et graviers propres et de passées argileuses. Pour ces milieux, la direction du gradient de charge et celle de la vitesse d'écoulement ne sont plus en général confondues: l'écoulement va avoir tendance à suivre les directions de perméabilités les plus grandes.



On est donc amené à considérer la perméabilité comme une propriété tensorielle, ce qui est simplement la traduction mathématique de cette observation.

On définit alors un tenseur de perméabilité \bar{k} ou \bar{K} ($\bar{K} = \frac{\rho g}{\mu} \bar{k}$) que l'on admettra être un tenseur du

2^{ème} ordre*, et symétrique** (c'est-à-dire que k est une matrice de 9 coefficients, symétrique par rapport à la diagonale):

$$\overline{\overline{K}} = \begin{vmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} k_{xy} &= k_{yx} \\ k_{xz} &= k_{zx} \\ k_{yz} &= k_{zy} \end{aligned}$$

Certains auteurs ont cherché à le démontrer à partir de modèles représentant le milieu poreux (modèles de tubes capillaires, de fissures, ...). Ces démonstrations justifient cette généralisation par l'analogie, mais ne la démontrent pas. Matheron a cependant établi, à partir de l'intégration des lois de Navier, la symétrie du tenseur de perméabilité (voir plus loin).

Nous écrivons donc:

$$\vec{U} = -\overline{\overline{K}} \overrightarrow{\text{grad}} h \quad (4.1.5)$$

$$\vec{U} = -\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu} [\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z] \quad (4.1.6)$$

Explicitons par exemple cette dernière relation en calculant les trois composantes de la vitesse U , de la façon la plus générale:

$$\begin{aligned} U_x &= -\frac{k_{xx}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k_{xy}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k_{xz}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \\ U_y &= -\frac{k_{xy}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k_{yy}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k_{yz}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \\ U_z &= -\frac{k_{xz}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k_{yz}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k_{zz}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

On constate bien que cette écriture tensorielle permet, à un gradient dans une direction x donnée, de faire naître des composantes de l'écoulement sur les directions perpendiculaires y et z , ce qui est conforme à l'expérience. Cette relation a été écrite en utilisant six composantes distinctes, en tenant compte de la symétrie.

Cette écriture un peu lourde peut être simplifiée en utilisant de nouveaux axes orthogonaux X, Y, Z , déduits des premiers par une rotation, tels que le tenseur de perméabilité se réduise à ses composantes diagonales. Mathématiquement, XYZ sont les directions pour lesquelles l'écoulement est effectivement parallèle au gradient de charge (en pratique, une direction orthogonale à la stratification et deux directions

* On définit un tenseur du 2^{ème} ordre par la règle de transformation des composantes du tenseur lors d'une rotation de repère cartésien des coordonnées: si, dans un repère $(x_1 x_2 x_3)$, les composantes du tenseur sont K_{ij} , les composantes K'_{ij} dans un repère $(x'_1 x'_2 x'_3)$ seront:

$$K'_{ij} = \sum_l \sum_m \cos \alpha_{li} \cos \alpha_{mj} K_{lm}$$

où α_{li} est l'angle de l'axe ox_l avec l'axe ox'_i . On peut établir facilement que c'est bien ainsi que se **transforment** les composantes du tenseur de perméabilité, à partir d'un raisonnement sur les flux.

** On peut montrer macroscopiquement que la symétrie de ce tenseur est une condition suffisante, au moins pour rendre compte des observations. Dans un milieu stratifié, il est en effet évident que les directions parallèles et perpendiculaires à la stratification sont des directions privilégiées de l'écoulement, pour lesquelles le gradient de charge et la vitesse d'écoulement sont de nouveau confondues, c'est-à-dire que les composantes du tenseur se réduisent à la composante diagonale. Or on sait qu'une matrice symétrique est une condition suffisante pour que ses valeurs propres soient distinctes et les directions propres orthogonales. Mais pour démontrer que cette condition est nécessaire, il faut faire appel au 1^{er} et 2^{ème} principes de la thermodynamique.

parallèles à celle-ci): ces directions sont appelées directions principales d'anisotropie du milieu. Dans ces axes, le tenseur \bar{k} se réduit donc à trois composantes diagonales:

$$\bar{k} = \begin{vmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{vmatrix} \quad (4.1.8)$$

et les relations (4.1.7) s'écrivent:

$$\begin{aligned} U_x &= -\frac{k_{xx}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ U_y &= -\frac{k_{yy}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \\ U_z &= -\frac{k_{zz}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

(si z est toujours la direction verticale)

En pratique, on distinguera, dans les milieux sédimentaires à stratification plus ou moins horizontale, deux perméabilités: une perméabilité verticale k_{zz} et une perméabilité horizontale $k_{xx} = k_{yy}$. Le rapport d'anisotropie $\frac{k_{xx}}{k_{zz}}$ est généralement compris entre 1 et 100.

Tout ce que nous venons de dire se transpose pour la perméabilité \bar{K} , qui est égale à la première à un facteur scalaire prêt. Pour la suite de l'exposé, nous supposons toujours nous être placés dans des axes parallèles aux directions principales du tenseur de perméabilité, z étant toutefois la verticale (sans quoi le terme $\rho g \overrightarrow{\text{grad}} z$ dans (4.1.6) se trouve distribué sur les trois équations en XYZ de (4.1.9), alourdissant l'écriture). Cette difficulté disparaît si le fluide est incompressible, car on peut utiliser la charge h .

Notez que si l'anisotropie est uniforme (la même en tout point de l'espace), on peut se ramener à un milieu isotrope par anamorphose sur les coordonnées (voir § 7.1.6).

e) Milieu fissuré

Il existe actuellement deux approches des écoulements en milieu fissuré:

- la modélisation de l'écoulement prenant en compte les fissures une à une,
- la modélisation par milieu continu équivalent.

Dans une fissure élémentaire (Louis, 1974), les lois de l'écoulement s'écrivent, en résumant cet auteur:

$$\text{régime laminaire: } V = K_f J_f$$

$$\text{régime turbulent: } V = K'_f J_f^\alpha$$

où V = vitesse moyenne d'écoulement dans la fissure, c'est la vitesse d'un fluide se déplaçant de manière uniforme sur tout le profil et produisant le même débit.*

$$K_f = \text{conductivité hydraulique de la fissure, } [LT^{-1}]$$

$$K'_f = \text{conductivité turbulente de la fissure, } [LT^{-1}]$$

$$J_f = \text{projection orthogonale du gradient hydraulique sur le plan de fracturation}$$

$$\alpha = \text{degré de non-linéarité sur le plan de l'écoulement } (0,5 \leq \alpha \leq 1)$$

Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent se fait en fonction du nombre de Reynolds, Re , d'une part, et de la rugosité relative, R_r , de l'autre.

Le nombre de Reynolds, sans dimension, est défini pour une conduite cylindrique par:

*Nous avons montré au § 3.4 que le profil réel de vitesse, en régime laminaire, est parabolique si la fissure est lisse.

$$R_e = \frac{Vd\rho}{\mu} \quad \begin{cases} V = \text{vitesse moyenne du fluide} \\ d = \text{diamètre de la conduite} \\ \frac{\mu}{\rho} = \text{viscosité cinématique} \end{cases} \quad (4.1.10)$$

En hydraulique classique, les écoulements sont laminaires pour $R_e < 2000$, turbulents pour $R_e > 2000$.

Pour une fissure plane, on remplace le diamètre de la conduite par le "diamètre hydraulique" défini par:

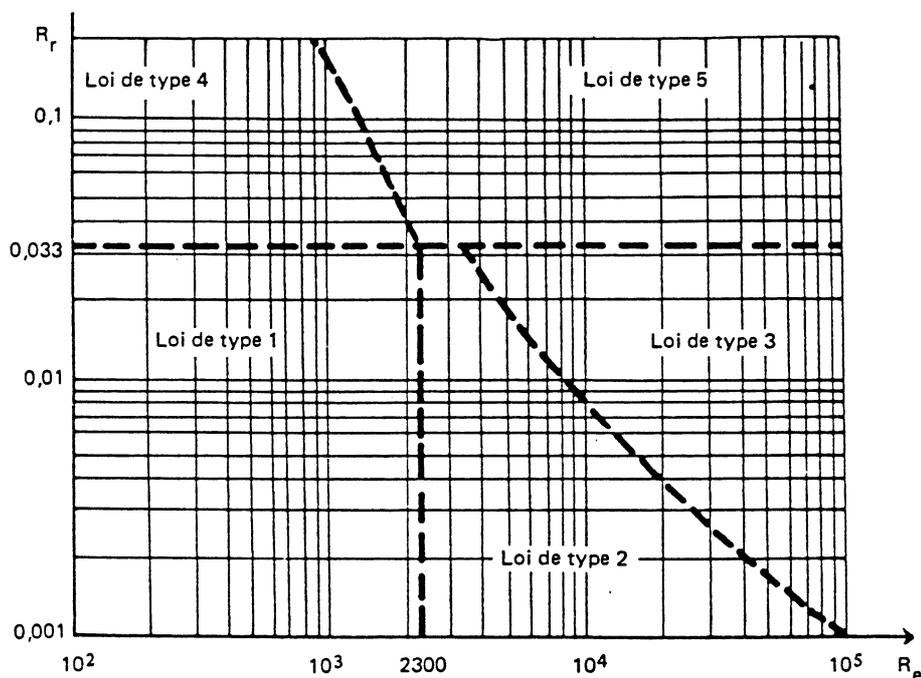
$$D_h = 4 \frac{S}{p} \quad \begin{cases} S = \text{section d'écoulement de la fissure} \\ p = \text{périmètre extérieur de cette section d'écoulement} \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Pour une fissure très étendue, D_h est égal à deux fois son ouverture.

La rugosité relative, sans dimension, est définie par:

$$R_r = \frac{\epsilon}{D_h} \quad \begin{cases} \epsilon = \text{hauteur moyenne des aspérités dans la fissure} \\ D_h = \text{diamètre hydraulique (4.1.11)} \end{cases} \quad (4.1.12)$$

En fonction de R_e et R_r , Louis définit empiriquement cinq régimes d'écoulement, dont les domaines de validité sont représentés sur la figure ci-dessous:



Les lois en régime stationnaire de l'écoulement pour chaque régime sont fonction de l'ouverture e , de la viscosité cinématique μ/ρ , de la rugosité relative R_r et du gradient de charge dans le plan de fissure J_f :

$$\text{Type 1: laminaire lisse:} \quad V = - \left(\frac{\rho g e^2}{12\mu} \right) J_f \quad (4.1.13)$$

$$\text{Type 2: turbulent lisse:} \quad V = - \left(\frac{g}{0,079} \left(\frac{2\rho e^5}{\mu} \right)^{1/4} J_f \right)^{4/7} \quad (4.1.14)$$

$$\text{Type 3: turbulent nuageux:} \quad V = - \left(4\sqrt{eg} \log \frac{3,7}{R_r} \right) \sqrt{J_f} \quad (4.1.15)$$

$$\text{Type 4: laminaire rugueux:} \quad V = - \left(\frac{\rho g e^2}{12\mu(1 + 8,8R_r^{1,5})} \right) J_f \quad (4.1.16)$$

$$\text{Type 5: turbulent très rugueux: } V = - \left(4\sqrt{\varepsilon g} \log \frac{1,9}{R_r} \right) \sqrt{J_f} \quad (4.1.17)$$

Dans ces expressions, il s'agit du log Népérien.

Si enfin la fissure n'est pas entièrement ouverte (les deux lèvres se touchent par endroits), il faut multiplier les 2^{èmes} membres des expressions (4.1.13) à (4.1.17) par le "degré de séparation de la fracture" F :

$$F = \frac{\text{surface ouverte de fracture}}{\text{surface totale de fracture}} \quad (4.1.18)$$

Pour un système de fissures parallèles et continues, en régime laminaire, on peut calculer la conductivité hydraulique équivalente du milieu par:

$$K = \frac{e}{b} K_f + K_m \quad [LT^{-1}] \quad (4.1.19)$$

- b = distance moyenne entre fissures,
- K_f = conductivité hydraulique de fissure (4.1.13) ou (4.1.16),
- K_m = perméabilité de la matrice rocheuse $[LT^{-1}]$.

K est une perméabilité *directionnelle*, c'est-à-dire donnée pour un gradient hydraulique parallèle au plan de fissure.

Si le système de fracture est discontinu (les fissures sont de longueur finie et ne sont pas connectées), l'essentiel du transfert se fait dans la matrice, les fissures servant de "courts-circuits". Louis propose, pour la conductivité directionnelle équivalente:

$$K = K_m \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{L - \ell} - \frac{\ell}{L} \right) \right] \quad (4.1.20)$$

- dans lequel ℓ = extension moyenne des fissures,
- L = distance moyenne entre deux fissures non connectées.

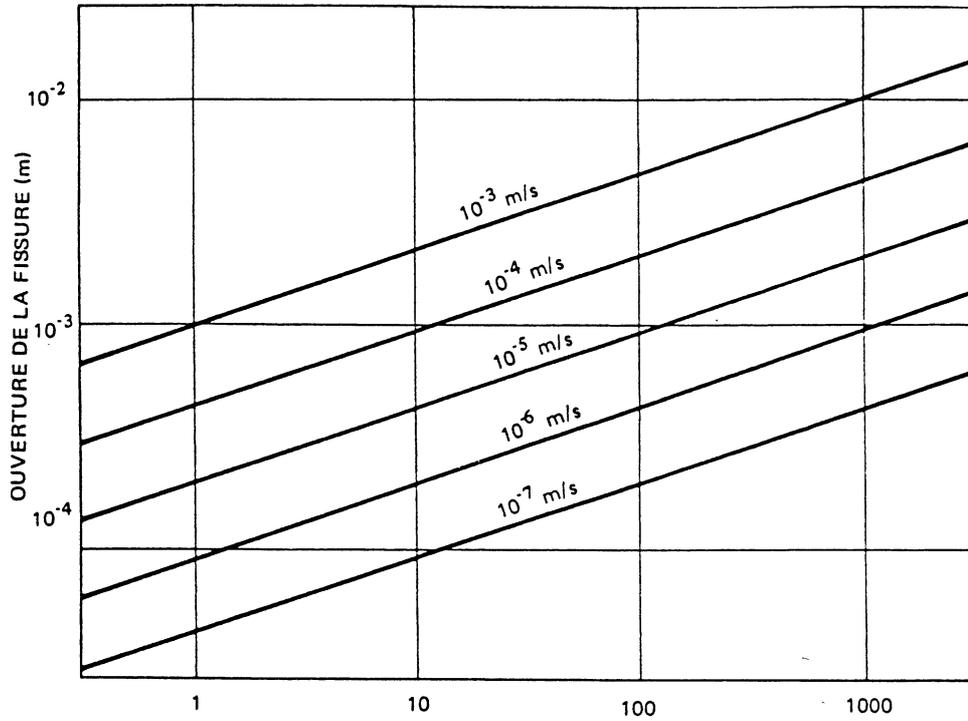
Ces perméabilités sont les perméabilités directionnelles du milieu continu équivalent. Dans le cas de fissures continues, la perméabilité directionnelle continue du milieu équivalent est donc fonction de l'ouverture de la fissure au cube:

$$K = e^3 \frac{Fg\rho}{12\mu bC} \quad \begin{cases} F = \text{degré de séparation de fracture (4.1.18)} \\ C = 1, \text{ régime de type 1} \\ C = 1 + 8,8R_r^{1,5}, \text{ régime de type 4} \end{cases}$$

Maini et Hocking (1977) donne ainsi l'allure de l'équivalence entre la perméabilité d'un milieu fissuré et d'un milieu poreux. Par exemple, le débit s'écoulant à travers une section de 100 m d'épaisseur de milieu poreux de perméabilité 10^{-7} m/s pourrait être amené par une *seule fissure*, dans une roche imperméable, dont l'ouverture ne serait que de 0,2 mm ! Cela montre l'extrême importance d'une seule fissure, même très peu ouverte, dans l'écoulement. La figure de la page suivante, empruntée à Maini et Hocking, donne la relation entre l'ouverture de la fissure unique considérée, la perméabilité du milieu équivalent et l'épaisseur de la section de milieu continu équivalent à cette seule fissure.

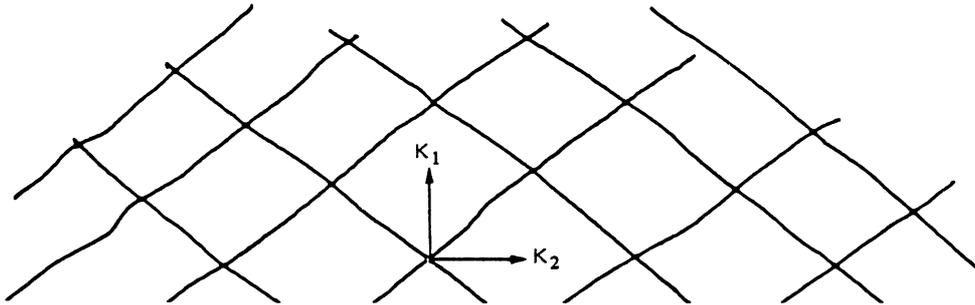
Pour modéliser l'écoulement dans un milieu formé de plusieurs systèmes de fractures conductrices, deux possibilités sont donc offertes:

- L'approche milieu continu: chaque famille de fissures définit une perméabilité directionnelle, formant donc un tenseur de perméabilité. Connaissant l'intensité et la direction de ces perméabilités, on est donc capable de calculer les directions d'anisotropie du tenseur et les perméabilités dans ces directions.



COMPARAISON ENTRE LA PERMÉABILITÉ DES MILIEUX POREUX ET DES MILIEUX FISSURÉS, EN FONCTION DE L'OUVERTURE (D'APRES MAINI ET HOCKING, 1977)

Par exemple, dans le plan, deux systèmes de fractures ayant la même perméabilité directionnelle, mais se recoupant suivant un angle non droit, donne les directions principales d'anisotropie suivantes:

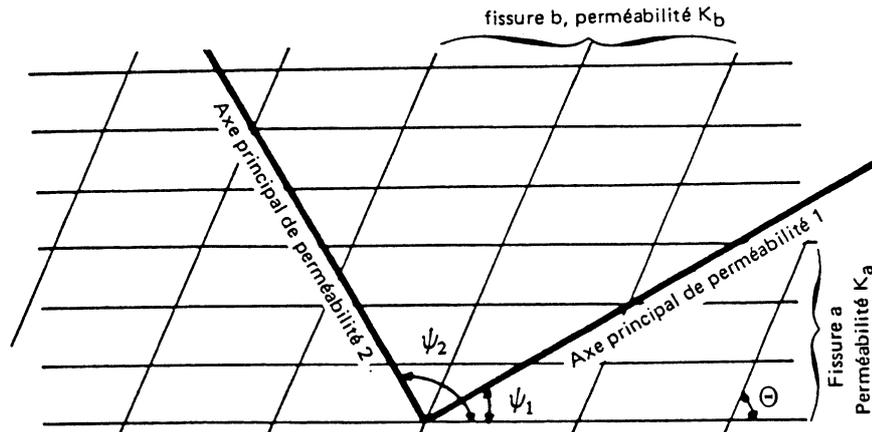


Bray, cité par Maini et Hocking, a établi les expressions suivantes pour calculer les directions d'anisotropie et les perméabilités principales du milieu équivalent:

$$\psi_i = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sin 2\Theta}{\cos 2\Theta \frac{K_a}{K_b}} \right)$$

$$K_i = \frac{K_a K_b \sin^2 \Theta}{K_a \sin^2 \psi_i + K_b \sin^2 (\Theta - \psi_i)}$$

où K_a et K_b sont les perméabilités directionnelles équivalentes des réseaux de fissures a et b , comme le montre la figure suivante empruntée aux mêmes auteurs.



Cette approche milieu continu est alors valable à une certaine échelle d'observation: on ne représentera pas exactement les vitesses d'écoulement ou les charges dans chaque fracture, mais une valeur moyenne de ces grandeurs sur un ensemble de fractures.

La définition des perméabilités de chaque famille de fractures peut être envisagée de deux façons:

- soit en mesurant (ou estimant) les propriétés géométriques moyennes des fissures (ouverture, espacement, rugosité...) et en utilisant les expressions données ci-dessus,
- soit en mesurant directement, par des essais in situ, les perméabilités K_f des fractures élémentaires par des injections d'eau.

• A contrario, l'approche "milieu discontinu" consiste à prendre en compte soit chacune des fissures élémentaires du système, soit des fissures équivalentes remplaçant plusieurs fissures élémentaires d'une famille.

Le modèle est alors constitué de "nœuds" où se recoupent les fissures, joints par des plans où s'écoulent les fluides selon les lois directionnelles données plus haut. On calcule des charges aux nœuds, des vitesses dans les plans. Louis montre qu'en régime laminaire les écoulements sont à potentiels, les vitesses étant obtenues par dérivations du potentiel:

$$\Gamma = K_f \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$$

Si cette approche permet de représenter plus fidèlement les écoulements à l'échelle fine, en revanche, elle demande de connaître avec exactitude la position dans l'espace et les propriétés de chacune des fissures une à une, ou regroupées par famille.

Nota: Ecoulements transitoires dans les milieux fissurés.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'écoulement de l'eau était stabilisé ou permanent, c'est-à-dire ne variant pas avec le temps. Si l'on fait intervenir des écoulements transitoires, une des propriétés fondamentales des milieux fissurés apparaît: il s'agit de la double porosité.

En effet, dans le cas général, le milieu fissuré peut être considéré comme la coexistence de deux systèmes de vides: les ouvertures de fissures et la porosité inter-granulaire des blocs de roche que séparent ces fissures. La définition de la perméabilité équivalente du milieu que nous avons fournie en (4.1.19) fait d'ailleurs référence à ce double système puisqu'on additionne les perméabilités K_f des fractures à la perméabilité K_m des blocs.

En régime permanent, cette double porosité et cette double perméabilité sont prises en compte par la notion de perméabilité équivalente. Mais en régime transitoire, on conçoit bien que la transmission des variations de pression soit beaucoup plus rapide dans les fissures que dans la matrice des blocs, si $K_f \gg K_m$. On sera donc amené à définir, dans un volume représentatif élémentaire, l'existence de deux pressions différentes, l'une dans les fissures et l'autre dans la matrice, accompagnée d'un terme d'échange de masse entre la porosité inter-granulaire et la porosité de fissure.

Ces problèmes ont été étudiés en particulier en France par Lefevre du Prey, malheureusement décédé accidentellement, et à l'étranger par divers auteurs, dont C. Braester, J.E. Warren, P.J. Root et G.I. Barenblatt (Union Soviétique). Ce dernier propose une loi de mouvement de la forme:

$$\operatorname{div} \left[\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p_f + \eta \beta_o \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} p_f \right] = \beta_o \frac{\partial p_f}{\partial t}$$

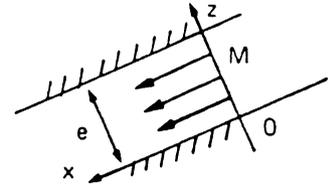
où k_f est la perméabilité intrinsèque de fissure: $k_f = \frac{K_f \mu}{\rho g}$,
 p_f est la pression dans les fissures,
 $\eta = \frac{k_f}{\alpha}$ paramètre caractéristique du degré de fissuration, où α caractérise l'intensité du transfert entre blocs et fissures,
 β_o coefficient de compressibilité élastique habituel de l'ensemble eau + milieu poreux (voir Chap. 5).

Ceci conduit en fait à adopter une loi de Darcy particulière dans les milieux fissurés, qui dépendrait du temps et s'écrirait:

$$U = -\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p_f - \eta \beta_o \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} p_f$$

f) Transmissivité

Si la nappe d'eau souterraine circule dans une couche de puissance e ,



et que l'on veuille calculer le flux transitant dans la direction d'écoulement x dans la couche pour une largeur unitaire dans la direction perpendiculaire à la figure, on obtient:

$$Q/l = \int_0^e \vec{U} \cdot \vec{n} dz = \int_0^e U_x dz$$

n étant la normale à l'axe oz , et U_x la composante de la vitesse dans la direction x .

Supposons que z soit la direction principale d'anisotropie, c'est-à-dire que les deux autres directions soient dans le plan de la couche (x, y). Alors, en tout point M de oz :

$$\vec{U} = -\overline{\overline{K}}_M \overrightarrow{\operatorname{grad} h}$$

$\overline{\overline{K}}_M$ étant le tenseur de perméabilité dans le plan xy passant par M , et $\overrightarrow{\operatorname{grad} h}$ le gradient de charge dans ce plan. Supposons de plus que ce gradient soit constant sur la transversale oz . Alors:

$$Q/l = -\operatorname{grad} h \int_0^e \overline{\overline{K}}_M dz$$

Cette intégrale a été baptisée la transmissivité, $\overline{\overline{T}} = \int_0^e \overline{\overline{K}} dz$.

Si K est isotrope et constante suivant oz :

$$T = Ke$$

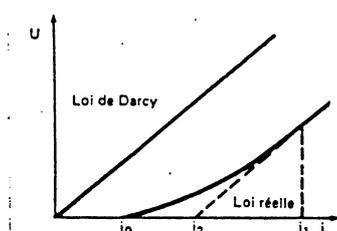
T s'exprime en m^2/s et est très fréquemment utilisé pour les nappes souterraines, qu'elles soient ou non horizontales.

4.2. LIMITE DE VALIDITE DE LA LOI DE DARCY

La seule justification des différentes généralisations que nous avons données de la loi élémentaire expérimentale de Darcy est en fait l'expérience: on constate que les calculs réalisés grâce à cette loi généralisée s'accordent avec l'observation.

Cependant, du côté des faibles gradients comme du côté des forts gradients hydrauliques, il existe des distorsions à la loi, à vrai dire rarement rencontrées en pratiques.

a) Du côté des faibles valeurs du gradient hydraulique



Dans le cas des argiles compactes, la loi de variation la plus générale pour les faibles valeurs du gradient est donnée par la figure ci-contre (Jacquin, 1965):

- en-dessous d'une valeur i_0 , la perméabilité est nulle;
- entre i_0 et i_1 , la relation n'est pas linéaire;
- la proportionnalité correspondant à la loi de Darcy ne s'applique que pour $i > i_1$, s'exprimant par une formule de la forme $U = K(i - i_2)$.

Les valeurs de i_0 , i_1 et i_2 varient énormément selon le type d'argile et l'état de sa structure; la teneur en sels de l'eau intervient également. Indiquons simplement que i_2 atteint facilement des valeurs de l'ordre de plusieurs dizaines pour la montmorillonite. *Cette théorie est cependant aujourd'hui controversée, certains invoquent des pressions osmotiques pour expliquer ces seuils.*

b) Du côté des fortes valeurs du gradient hydraulique

Lorsque l'on augmente le gradient hydraulique, on observe expérimentalement qu'il n'y a plus proportionnalité entre ce gradient et la vitesse de filtration:

$$\text{grad } h = \alpha U + \beta U^2$$

αU : pertes dues au frottement visqueux sur les parois de la matrice,

βU^2 : pertes dues à l'inertie du fluide (dissipation d'énergie cinétique dans les pores: les lignes de courant convergent et divergent très rapidement; il s'agit de pertes analogues aux pertes dans les coudes ou les étranglements des tubes).

Le gradient hydraulique-limite au-delà duquel la loi linéaire de Darcy n'est plus utilisable, dépend essentiellement du milieu considéré.

Pour tenter de ramener ce gradient-limite à une propriété intrinsèque du milieu, on définit parfois un "nombre de Reynolds en milieu poreux", sans dimension, par:

$$R_e = \frac{U\sqrt{k\rho}}{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \text{vitesse de filtration,} \\ \sqrt{k} = \text{racine carrée de la perméabilité intrinsèque, dimension d'une longueur.} \end{array} \right.$$

$$R'_e = \frac{Ud\rho}{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho, \mu = \text{masse spécifique et viscosité dynamique du fluide,} \\ d = \text{diamètre moyen des grains, ou diamètre efficace } d_{10}. \end{array} \right.$$

Rappelons que la définition exacte du nombre de Reynolds dans une conduite circulaire est $\frac{ud\rho}{\mu}$. (u : vitesse moyenne du fluide dans la conduite de diamètre d). Vu la différence de définition, il ne faut pas chercher à comparer ces nombres entre eux.

En pratique, on admet que la loi de Darcy est valable si le nombre de Reynolds en milieu poreux (en prenant le diamètre moyen des grains) est inférieur à une limite comprise entre 1 et 10, auquel cas l'écoulement est purement laminaire à l'intérieur des pores.

De 10 à 100 commence un régime d'écoulement de transition où les forces d'inertie ne sont plus négligeables, et où la loi de Darcy ne s'applique plus.

Au-delà de 100, le régime d'écoulement est turbulent à l'intérieur des pores, et la loi de Darcy s'applique encore moins.

En pratique, à l'exception du régime karstique et du voisinage immédiat des ouvrages captants, et pour les vitesses effectives réelles d'écoulement, le nombre de Reynolds critique n'est pas atteint et on reste dans le domaine laminaire. Il en résulte que, même au voisinage d'un puits, l'ensemble des pertes de charge étant en série, les termes quadratiques n'apparaissent que dans une zone limitée et généralement à écoulement facile (massif de graviers filtrants) et n'ont qu'un faible poids.

Comme valeur du gradient-limite, on peut noter la formule empirique de Sichardt:

$$i = \frac{1}{15\sqrt{K}}$$

K étant exprimé en m/s. Voir en particulier les travaux de Chauveteau.

c) Loi de Darcy en régime transitoire.

La loi de Darcy, expérimentale et surtout théorique, s'établit pour les écoulements permanents (indépendants du temps). Nous avons déjà dit, au § 4.1.e ci-avant, qu'en milieu fissuré le phénomène de double porosité entraîne l'existence d'un terme transitoire nouveau dans la loi de Darcy.

Il est également possible de montrer, sur le plan théorique, qu'en milieu poreux, un terme supplémentaire apparaît dans la loi de Darcy si le régime est transitoire.

Revenons un instant aux équations de Navier-Stokes. Nous avons vu, au § 3.4, que sur des milieux théoriques, en régime permanent, on passe du cas où les forces extérieures sont nulles à celui où elles existent en rajoutant simplement le terme ρF_i au gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x_i}$. En reprenant les équations complètes de Navier (3.1.2), on s'aperçoit que les termes transitoires $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}$ jouent dans les équations le même rôle que les forces extérieures. Si donc nous écrivons en permanent:

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z)$$

nous devrions écrire, en transitoire:

$$\vec{U} = -\frac{k}{\mu} \left(\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z - \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)$$

Le facteur $\frac{1}{\omega}$ pour le terme transitoire provient de l'intégration, dans le VER, du terme transitoire microscopique* $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$. Cependant, ce terme supplémentaire est en pratique *toujours négligé*, car U étant petit en milieu poreux, $\frac{\partial U}{\partial t}$ est négligeable devant les autres termes, sauf peut-être pendant des temps de l'ordre de la seconde quand s'ébranle l'écoulement en milieu poreux.

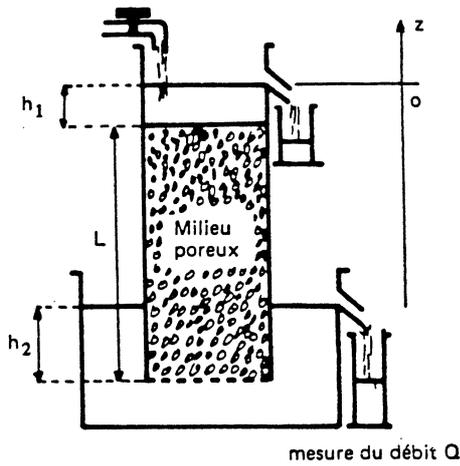
4.3. MESURES DE LA PERMEABILITE SUR ECHANTILLON

a) Milieux à forte perméabilité.

Si la perméabilité du milieu n'est pas trop faible, on peut employer une différence de **charge engendrée** uniquement par la pesanteur.

- *Perméamètre à charge constante*: On reprend l'expérience de Darcy:

* La démonstration théorique se fait en réécrivant d'abord les équations de Navier en dérivées partielles du temps au lieu de dérivées totales.



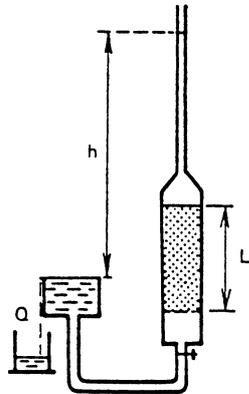
Si A est la section de l'échantillon de milieu poreux, la loi de Darcy s'écrit:

$$Q = -KA \text{ grad } h$$

soit:

$$K = \frac{QL}{((h_1 + L - h_2)A)}$$

- *Perméamètre à charge variable*: Si le coefficient de perméabilité est inférieur à 10^{-5} m/s, le perméamètre à charge constante doit être remplacé par le perméamètre à charge variable où une charge plus importante est donnée au moyen d'un long tube de faible section a .



On peut écrire:

$$Q = KA \frac{h}{L} \quad (\text{loi de Darcy})$$

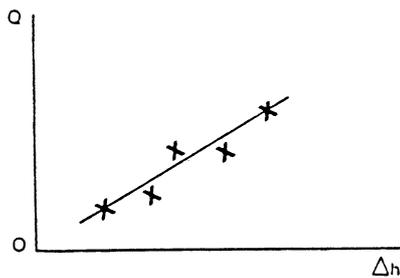
$$Q = -a \frac{dh}{dt} \quad (Q: \text{variation du volume par unité de temps})$$

$$\text{d'où: } \frac{dh}{h} = -\frac{A}{a} K \frac{dt}{L} \quad (A: \text{section de l'échantillon})$$

$$\text{Log } \frac{h}{h_0} = -\frac{AK}{aL}(t - t_0)$$

En portant sur un graphique $\log h$ en fonction du temps, on obtient une droite dont la pente est proportionnelle à K .

b) Milieux à faible perméabilité



Si l'on veut mesurer des perméabilités plus faibles, on appliquera des différences de pression plus importantes à l'aide de pompes et on mesurera les pressions à l'amont et à l'aval pour différentes valeurs du débit Q . La pente de la droite donnant Q en fonction de Δh permet de calculer la perméabilité. On mesurera bien souvent la perméabilité à un gaz, plus accessible. Connaissant ρ et μ , on peut passer de l'une à l'autre.

Les diverses mesures effectuées au laboratoire n'atteignent pas la perméabilité in situ, qui peut être assez différente. Pour mesurer celle-ci, on utilise la réaction du terrain à un pompage ou à une absorption artificielle, selon que l'on a affaire à un terrain perméable ou imperméable.

Cette réaction sera étudiée en détail plus loin. On peut aussi atteindre théoriquement cette perméabilité à l'aide de traceurs tels que la fluorescéine introduits dans l'aquifère. En fait, les traceurs, très sensibles aux hétérogénéités et sujets à l'adsorption, ne permettent pas d'obtenir des valeurs moyennes correctes.

c) Valeurs de la perméabilité

La perméabilité d'une roche est, bien sûr, due à l'existence d'une porosité efficace, c'est-à-dire à l'existence de vides interconnectés.

De même que l'on a défini une porosité d'interstice et une porosité de fissure, on pourrait distinguer deux types de perméabilités (interstitielle et de fissure) que l'on désignait autrefois par:

- perméabilité en petit,
- perméabilité en grand,

la taille du VRE permettant de les définir n'étant pas la même.

La tendance actuelle est de réserver le terme de "coefficient de perméabilité" aux milieux à porosité d'interstice, et celui de "conductivité hydraulique" à ceux à porosité de fissure, la définition de ces deux constantes étant cependant la même. Dans la pratique, il est difficile de séparer sur le terrain les deux types de perméabilité qui peuvent coexister.

Pour les roches détritiques d'interstice, la perméabilité est fonction de la taille des grains:

- graviers sans éléments fins:	$K \simeq 10^{-2}$ m/s
- sables non argileux et graviers:	10^{-2} à 10^{-5} m/s
- sables fins et argileux:	10^{-5} à 10^{-9} m/s
- argiles franches	10^{-9} à 10^{-13} m/s

La distinction entre roches perméables et imperméables est arbitrairement faite à 10^{-9} m/s. Les argiles sont imperméables malgré leur porosité totale importante, à cause de la finesse de leurs pores leur donnant une porosité efficace très faible.

Les grès ont une perméabilité analogue à celle des sables, s'ils ne sont pas trop cimentés. On a mesuré, par exemple, 10^{-5} m/s pour les grès vosgiens en Lorraine. Si les grès sont à ciment calcaire, celui-ci peut être dissous du fait de la présence de CO_2 dans les eaux, augmentant ainsi la perméabilité.

Pour les roches à porosité de fissure, les valeurs de conductivité hydraulique sont extrêmement variables, mais généralement inférieures à celles des milieux détritiques.

Il faut noter que la perméabilité peut varier, dans une roche fissurée, avec la contrainte par fermeture des microfissures. Inversement, une pression élevée dans une fissure peut "ouvrir" la fissure et augmenter la perméabilité, sans parler de la fracturation hydraulique, qui consiste à créer des fissures dans la roche en y injectant un fluide à haute pression. Voir les travaux de L. Gale et P. Witherspoon, ou F. Cornet.

Il faut mettre à part le cas des calcaires et des roches solubles où la dissolution par le CO_2 élargit les fissures dans la mesure où l'eau circule. On aboutit très rapidement à des vides importants où circulent de véritables rivières souterraines: c'est le régime karstique.

4.4. APPROCHE PROBABILISTE DE LA PERMEABILITE, ET VARIABILITE SPATIALE

La définition de la perméabilité en tant que fonction aléatoire demande un changement d'échelle qu'a proposé G. Matheron en 1967, en se référant aux travaux de Schwydtler (1962). En effet, on ne peut parler de perméabilité ponctuelle comme nous l'avons fait pour la porosité car, à l'échelle microscopique, la loi de Darcy, que sous-entend la notion de perméabilité, ne s'applique pas à l'écoulement: c'est la loi de Navier-Stokes qui commande la relation entre charges et vitesses.

On montre alors que la loi de Darcy découle simplement de la linéarité des équations de Navier, non de la forme de cette loi. On montre de plus que, dans l'hypothèse d'un milieu poreux homogène (stationnaire et ergodique), le tenseur des perméabilités macroscopiques ne dépend que des propriétés géométriques du milieu poreux (mais malheureusement pas de la seule loi de distribution de la porosité ponctuelle).

Cette perméabilité macroscopique dépend donc conceptuellement des propriétés géométriques microscopiques du milieu poreux, que nous avons définies comme des fonctions aléatoires: on peut donc conceptuellement définir une perméabilité comme une nouvelle fonction aléatoire, ayant sa propre loi de

distribution et de "conciliation", et donc une définition ponctuelle, bien que macroscopique. On appellera "variable régionalisée" une propriété ainsi définie.*

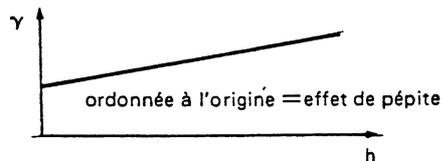
Cette conception probabiliste nous amène donc directement à nous interroger sur la variabilité spatiale de la perméabilité (ou de la transmissivité, si l'on s'intéresse aux problèmes d'écoulement à deux dimensions). Notez que ces préoccupations sont récentes car, jusqu'à ces dernières années, les méthodes de résolution des problèmes d'écoulement étant analytiques, on faisait simplement l'hypothèse que perméabilité (et porosité) étaient uniformes dans l'espace. Les méthodes numériques permettent aujourd'hui de dépasser ce stade.

Les données de transmissivités ou de perméabilités sont généralement peu nombreuses dans les nappes. L'idée s'est cependant peu à peu fait jour que la distribution des transmissivités dans l'espace n'est pas quelconque, mais suit une loi lognormale. On peut citer plusieurs auteurs, en particulier J. Jetel et J. Krasny (1974) qui se réfèrent également à Law (1944), Walton et Neill (1963), Krumbein et Graybill (1965), Farengolts et Kolyada (1969), Ilyin, Tchernichew, Dzekter et Zilberg (1971), Jetel (1971, 1972) qui ont étudié la répartition spatiale des perméabilités ou des transmissivités dans de très nombreux bassins. Il faut aussi citer la très intéressante étude de D. Rousselot (1976) qui cherche à montrer la validité de cette loi de distribution lognormale dans 35 unités hydrogéologiques françaises, allant des alluvions à des milieux fissurés, sédimentaires ou cristallins.**

Réfléchissons un instant sur la signification de cette loi. Si les transmissivités sont distribuées de façon lognormale dans un aquifère, peut-on en conclure que l'on peut les considérer comme les réalisations de FA stationnaires et ergodiques ? Pas exactement. Si l'on accepte les notions de milieu poreux aléatoire, de stationnarité et d'ergodicité, alors on doit pouvoir déduire la loi de distribution de la FA de la loi spatiale observée. Donc l'existence de la loi spatiale à un point d'appui ne met simplement pas en défaut l'hypothèse aléatoire. Mais, pour parler de variables régionalisées, nous avons dit qu'il faut également qu'il existe une loi de "conciliation" spatiale (influence de la valeur prise en un point sur les valeurs voisines), c'est-à-dire une loi spatiale à plusieurs points d'appui.

Delhomme (1974, 1976) a étudié l'existence de ce type de structuration des transmissivités à l'aide du variogramme.*** Il a mis en évidence:

- que la structuration d'un champ de transmissivités apparaît beaucoup plus forte si l'on étudie le logarithme de T (ou de K) plutôt que la valeur elle-même. Ceci découle évidemment de l'existence de la loi lognormale (Matheron, note 124, 1974);
- que cette structuration existe très généralement avec, cependant, le plus souvent un notable "effet de pépite" sur le variogramme:



* La définition exacte d'une VR (variable régionalisée) proposée par G. Matheron est une variable caractérisant un phénomène se déployant dans l'espace (et/ou dans le temps) et y manifestant une certaine structure. Une réalisation d'une fonction aléatoire peut en particulier être une VR si elle présente une structure spatiale, s'est-à-dire une dépendance de la valeur prise en deux points distincts ("conciliation" à deux points d'appui).

** Il faut cependant noter que ces études sont quelque peu biaisées par l'hypothèse, que font généralement leurs auteurs, de l'indépendance spatiale de K : deux valeurs dans l'espace ne seraient pas corrélées. Mais le résultat demeure (voir ci-après).

*** Si $K(x)$ est la variable régionalisée "perméabilité" dans l'espace, on appelle "variogramme de K " la grandeur:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Variance} [K(x+h) - K(x)]$$

où h est un vecteur d'accroissement à 1,2 ou 3 dimensions. Cette définition fait partie de la "théorie des variables régionalisées" de G. Matheron, fort utile en hydrogéologie (en particulier le krigeage, permettant d'estimer de façon optimale des grandeurs distribuées dans l'espace à partir de mesures ponctuelles).

Ce terme "effet de pépite" vient de la prospection minière et désigne une microrégionalisation de la structure: suivant que le point de mesure tombe ou non sur une "pépite", la valeur mesurée peut varier considérablement. A un phénomène bien structuré dans l'espace se rajoute, en quelque sorte, un effet erratique. Ceci n'a d'ailleurs rien pour étonner un hydrogéologue: il sait que deux puits très voisins peuvent avoir une transmissivité notablement différente, due à une "non uniformité" de la formation. Nous retrouvons simplement ici, en termes quantitatifs, cette non uniformité.

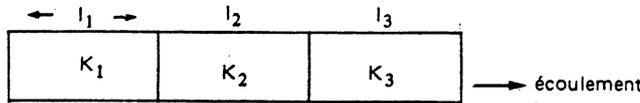
- que l'on peut considérer effectivement que les champs de transmissivités sont stationnaires, sans avoir besoin (principe de l'économie d'hypothèse) de chercher de stationnarité sur des accroissements, valable pour des phénomènes plus complexes.

Ces trois constatations apportent, en quelque sorte, une justification expérimentale à l'applicabilité de la conception "FA" des milieux poreux, et surtout à la faisabilité de l'inférence, à partir d'une réalisation unique, de la loi de distribution de la FA et de son comportement spatial.

Admettant que la perméabilité spatiale varie dans l'espace, comment composer les perméabilités locales pour obtenir une perméabilité moyenne ?

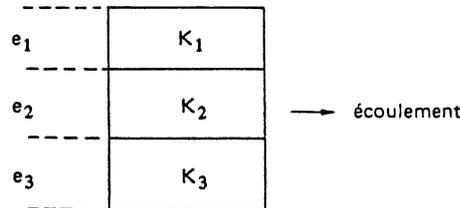
Dans une approche déterministe, il est facile de montrer que la composition de "blocs" uniformes de perméabilité juxtaposés dans l'espace donne, à une dimension:

- une loi de composition harmonique si les blocs sont en série:



$$\frac{\sum l_i}{K_{\text{moyen}}} = \sum \frac{l_i}{K_i}$$

- une loi de composition arithmétique si les blocs sont en parallèle:



$$K_{\text{moyen}} \sum e_i = \sum e_i K_i$$

On retrouve ici la loi de composition des résistances, pour la loi d'Ohm.

Dans une approche probabiliste, où la perméabilité peut varier dans toutes les directions de l'espace, Matheron (1967) a établi les résultats suivants:

- Si l'écoulement est uniforme (lignes de courant parallèles) quelle que soit la loi spatiale selon laquelle varie la perméabilité, et quel que soit le nombre de dimensions de l'espace, la perméabilité moyenne est toujours comprise entre la moyenne harmonique* et la moyenne arithmétique* des perméabilités

* moyenne harmonique: $\frac{1}{K_M} = E\left(\frac{1}{K}\right)$

moyenne arithmétique: $K_M = E(K)$

moyenne géométrique: $\text{Log } K_m = E(\text{Log } K)$

locales.

- Si la loi de distribution de la perméabilité est lognormale, et si l'on se place à deux dimensions, alors la perméabilité moyenne est exactement la moyenne géométrique des perméabilités locales, en écoulement uniforme.
- Si l'écoulement n'est pas uniforme (radial convergent, par exemple autour d'un puits), il n'existe pas de loi de composition constante dans le temps permettant de définir une perméabilité moyenne de Darcy. Ce problème est assez préoccupant du point de vue conceptuel, dans la mesure où c'est précisément par essais de pompage dans des forages que l'on mesure généralement la perméabilité (ou la transmissivité) in situ, dans un aquifère (voir Chap. 8). Ce point fait l'objet de recherches ultérieures.

On retiendra de cette discussion que la perméabilité varie dans l'espace, avec une loi de distribution généralement lognormale, et une corrélation spatiale assez forte (sur des distances allant de la centaine de mètres à plusieurs kilomètres, suivant les aquifères), mais aussi une assez grande variabilité erratique (effet de pépite). A deux dimensions, la loi de composition à adopter est alors géométrique. Le krigeage permet de calculer, par exemple pour les mailles d'un modèle numérique, les valeurs moyennes à utiliser à partir des mesures locales.

4.5. MOUVEMENTS DE L'EAU SOUS L'ACTION D'AUTRES CHAMPS DE FORCE

Le gradient de charge hydraulique est le principal moteur du mouvement de l'eau dans les sols; il n'est cependant pas le seul. On a en effet constaté expérimentalement qu'un milieu poreux soumis à d'autres gradients est le siège d'écoulement d'eau. Ce sont principalement:

- le gradient de potentiel électrique: l'eau se déplace des voltages élevés vers les voltages bas. Ce principe a été utilisé pour le drainage électrocinétique de sols peu perméables (voir Terzaghi et Peck (1967) ou Casagrande (1952));
- le gradient de concentration chimique: l'eau se déplace des zones à faibles concentrations vers celles à fortes concentrations. Cet effet fait aussi partie de l'effet osmotique qui, de plus, engendre une filtration sélective des ions en solution;
- le gradient thermique: écoulement des zones à fortes températures vers les zones à faibles températures. Ce phénomène a de l'importance dans la formation des lentilles de glace dans les sols (Harlan, 1973), etc...

On écrira donc une loi de Darcy généralisée de la forme:

$$\vec{U} = -\bar{K}_1 \text{ grad } h - \bar{K}_2 \text{ grad } E - \bar{K}_3 \text{ grad } C - \bar{K}_4 \text{ grad } \Theta$$

les coefficients K_i peuvent être scalaires ou tensoriels.* De façon similaire, les autres flux en milieu poreux (électricité, éléments en solution, chaleur) vont être liés aux mêmes gradients par d'autres séries de coefficients:

$$\vec{i} = -\bar{K}'_1 \text{ grad } h - \bar{K}'_2 \text{ grad } E - \bar{K}'_3 \text{ grad } C \quad \text{etc...}$$

un gradient de charge entraîne donc en particulier un écoulement d'électricité, d'éléments en solution, de chaleur, etc...

On est donc amené, en thermodynamique, à étudier simultanément l'ensemble des flux et l'ensemble des gradients, suivant ce que l'on appelle des processus de transports couplés. Il faut se reporter aux travaux d'Onsager (1931) ou Casimir (1945) cités par Bear (1972) sur la thermodynamique des processus irréversibles. Les coefficients K sont appelés "coefficients phénoménologiques" et doivent être mesurés expérimentalement. Il existe cependant, dans certains cas, des relations de symétrie et de non négativité dans la matrice des coefficients. En pratique cependant, les coefficients non diagonaux (c'est-à-dire ceux différents de la charge

* Casagrande a trouvé que la "perméabilité électro-osmotique" K_2 varie assez peu pour les sols remaniés ou lâches, et est de l'ordre de $5.10^{-9} \text{ m}^2/\text{Volts.s}$ (Rocheman, in Filliat, 1981).

pour la vitesse, du potentiel électrique pour le courant, de la température pour le flux de chaleur...) sont relativement petits et négligeables devant les termes diagonaux.

Gradients Flux	Charge hydraulique	Potentiel électrique	Température	Concentration
Fluide	DARCY	Electro-osmose Casagrande	Osmose thermique	Osmose chimique
Electricité	Reuss	OHM	Seebeck ou Thomson	Courant de sédimentation
Chaleur	Filtration thermique	PELTIER	FOURIER	DUFOUR
Éléments en solution	Ultrafiltration	Electrophorèse	SORET	FICK

N.B. Seuls les noms en majuscules sont universellement admis. Les cases blanches signifient seulement que l'effet correspondant ne porte pas de nom et non qu'il n'existe pas.

Chapitre 5

INTEGRATION DES EQUATIONS ELEMENTAIRES L'EQUATION DE DIFFUSIVITE - LA CONSOLIDATION

- | | |
|--|--|
| 5.1. Equation de diffusivité en nappe libre | 5.3. Equation de diffusivité générale:
cas de la nappe captive |
| 5.2. Théorie de la consolidation de Terzaghi
Action de l'eau intersticielle
sur les milieux poreux | 5.4. Cas des sols très compressibles
5.5. Autres équations de diffusivité |

Au cours des deux chapitres précédents, nous avons établi les trois équations de circulation d'un fluide en milieu poreux, n'ayant de signification que pour des volumes élémentaires de milieu poreux.

- équation de continuité:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \rho q = 0 \quad (3.2.3)$$

ρ : masse volumique du fluide, $[ML^{-3}]$

\vec{U} : vitesse de filtration du fluide $[LT^{-1}]$ (comme si toute la section était offerte à l'écoulement)

ω : porosité totale du M.P.*, sans dimension

q : débit par unité de volume de fluide prélevé (ou apporté s'il est négatif) dans le milieu poreux, $[T^{-1}]$
auquel s'ajoute un terme de déplacement d'interface fluide-solide si le milieu se déforme.

- loi de Darcy:

$$\vec{U} = -\frac{\bar{k}}{\mu} \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\operatorname{grad}} z \right] \quad (4.1.6)$$

- \bar{k} : tenseur de perméabilité intrinsèque, $[L^2]$
 μ : viscosité dynamique du fluide, $[ML^{-1}T^{-1}]$
 p : pression du fluide, $[ML^{-1}T^{-2}]$
 g : accélération de la pesanteur, $[LT^{-2}]$
 z : axe vertical orienté vers le haut
 $\overrightarrow{\operatorname{grad}} z$: vecteur de composantes (0,0,1)

Cette loi se simplifie pour les fluides incompressibles en:

$$\vec{U} = -\frac{\bar{k} \rho g}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} h = -\bar{K} \overrightarrow{\operatorname{grad}} h \quad (4.1.5)$$

h : charge, ou hauteur piézométrique, $[L]$

* Voir note infrapaginale § 3.2.1.b.

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.3.1)$$

\overline{K} : tenseur de perméabilité, $[LT^{-1}]$

Elle s'exprime aussi par (4.1.5) pour les fluides compressibles si l'on convient de définir la charge par:

$$h = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)g} \quad (3.3.2)$$

p_0 : pression à l'origine de l'axe z .

- équation d'état isotherme du fluide:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \quad (3.1.3)$$

β : coefficient de compressibilité du fluide, $[ML^{-1}LT^2]$

Nous allons combiner ces lois dans ce que l'on appelle l'équation de diffusivité, dont l'intégration permettra de calculer l'évolution du fluide en milieu poreux, l'inconnue unique conservée étant la pression p ou la charge h , à partir de laquelle on peut déduire les quatre autres inconnues, ρ et la vitesse \vec{U} (3 composantes). Nous obtiendrons ainsi l'équivalent de ce que l'on appelle "l'équation de la chaleur" en thermique ($\nabla^2 \Theta = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$, ρC capacité calorifique, λ conductivité, ∇^2 opérateur Laplacien).

Il est plus simple d'établir cette équation séparément dans trois cas particuliers en fonction des hypothèses que l'on peut faire sur le comportement du milieu poreux, dont nous n'avons pas encore jusqu'ici défini les équations d'état. Nous regarderons la nappe libre (eau et milieu poreux incompressibles), la théorie de la consolidation (eau incompressible, milieu poreux compressible) et le cas général (eau et milieu poreux compressibles).

5.1. EQUATIONS DE DIFFUSIVITE EN NAPPE LIBRE

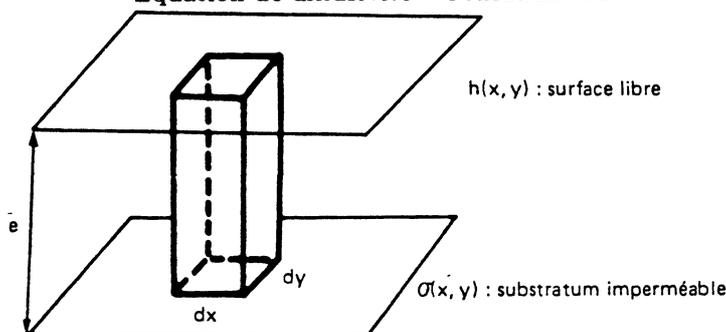
Une nappe libre est un milieu poreux qui n'est saturé que sur une certaine hauteur et est surmonté de milieu poreux sec et non saturé. La nappe est généralement limitée vers le bas par un substratum imperméable.

On peut négliger, dans ce cas, la compressibilité de l'eau (ρ constant) ainsi que celle du milieu poreux (ω constant); toute variation de charge va entraîner un mouvement de la surface libre qui, en saturant ou désaturant le milieu poreux, va stocker ou déstocker de l'eau: dans l'équation de continuité, il faut considérer un volume élémentaire qui comprenne un morceau de surface libre variable.

On prendra pour cela un prisme transversal à la nappe d'épaisseur e entre substratum imperméable et surface libre.

Nous allons supposer maintenant que, dans cette nappe libre, toutes les vitesses sont horizontales et parallèles entre elles sur une même verticale. Cette hypothèse, connue sous le nom d'**hypothèse de Dupuit**, est assez bien satisfaite dans la réalité dès que l'on s'éloigne des exutoires.

Supposons que le tenseur de perméabilité admette la verticale comme une de ses directions principales. D'après la loi de Darcy, s'il n'y a pas de composante verticale de la vitesse, c'est qu'il n'y a pas de gradient de charge vertical. Nous allons prendre alors la charge $h(x, y)$ comme inconnue et nous ramener ainsi à un problème plan puisque h est indépendant de z ; h représente donc la charge sur une verticale et, en particulier, la cote de la surface libre de la nappe s'éloigne des exutoires ou de la crête de la nappe.



Nous choisissons les axes x et y suivant les deux directions principales d'anisotropie du plan. Rétablissons les trois termes de l'équation de continuité pour le prisme $dx, dy(h - \sigma)$

a) Flux massique entrant par unité de temps sur les deux faces perpendiculaires à Ox :

$$F_x = \rho dy \left[\int_{\sigma(x,y)}^{h(x,y)} U_x(x, y, z) dz - \int_{\sigma(x+dx,y)}^{h(x+dx,y)} U_x(x + dx, y, z) dz \right]$$

U_x étant la composante de la vitesse de filtration suivant x .

Ceci s'écrit:

$$F_x = -\rho dy \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\sigma}^h U_x dz \right] dx$$

La loi de Darcy nous permet de calculer U_x :

$$U_x = -K_{xx}(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x}$$

En substituant, on remarque que $\frac{\partial h}{\partial x}$ ne dépend pas de z . Si on ajoute le terme correspondant au flux entrant par la face perpendiculaire à Oy , on obtient:

$$F = +\rho dx dy \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\sigma}^h K_{xx} dz \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{\sigma}^h K_{yy} dz \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\}$$

On supposera qu'il n'entre ni ne sort de flux par les faces haut et bas (voir plus loin, § c).

b) Variation de masse de l'élément

La masse d'eau mobilisable par gravité (porosité de drainage ω_d) contenue dans l'élément est $\rho \omega_d (h - \sigma) dx dy$ et sa variation dans l'unité de temps est:

$$\rho \omega_d \frac{\partial h}{\partial t} dx dy$$

La variation de la cote h de la surface libre entraîne bien la mise en jeu de la porosité de drainage ω_d , et non de la porosité totale ω .

c) Le débit volumique de fluide prélevé dans l'élément s'obtiendra par intégration de σ à h : q est positif s'il est prélevé, négatif s'il est injecté.

$$\int_{\sigma}^h q dz \cdot dx dy = Q dx dy$$

Q étant maintenant le débit prélevé par unité de surface de la nappe. Le débit massique est donc $\rho Q dx dy$.

Ce terme de débit par unité de surface permet justement de tenir compte des échanges de la nappe avec l'extérieur (prélèvements, infiltration, ...) en supposant qu'ils se réalisent sur toute l'épaisseur de la nappe.

d) Bilan

En écrivant la conservation de la masse en faisant la somme de ces trois quantités, il vient, en simplifiant par ρ , qui est constant, et $dx dy$ qui est l'aire élémentaire de nappe:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\sigma}^h K_{xx} dz \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{\sigma}^h K_{yy} dz \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \omega_d \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (5.1.1)$$

C'est l'équation de diffusivité en nappe libre. Elle est non linéaire en h .

Si K_{xx} et K_{yy} sont constants sur toute verticale, on peut faire disparaître l'intégrale sur z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx}(h - \sigma) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy}(h - \sigma) \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \omega_d \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (5.1.2)$$

Elle est toujours non linéaire en h .

Cependant, on peut généralement la linéariser en considérant les quantités:

$$T_{xx} = \int_{\sigma}^h K_{xx} dz \quad \text{et} \quad T_{yy} = \int_{\sigma}^h K_{yy} dz$$

que nous avons déjà définies comme les transmissivités de la nappe (intégrale de la perméabilité sur l'épaisseur de la nappe), anisotropes ici.

On supposera que la transmissivité varie peu avec la charge h , c'est-à-dire que les variations de h sont négligeables devant $(h - \sigma)$: par exemple, inférieures à 10%, ou encore que la répartition verticale de K est telle que les variations de h n'entraînent pas une variation de T de plus de 10% (c'est vrai si la perméabilité est plus forte en profondeur qu'en surface, par exemple une couche de graviers profonds surmontée par des sables fins). On écrit alors:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \omega_d \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (5.1.3)$$

Si enfin la transmissivité est isotrope et constante dans toute la nappe:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\omega_d}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (5.1.4)$$

équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre de type parabolique, analogue à l'équation de la chaleur. ∇^2 est l'opérateur Laplacien, défini ci-dessus à deux dimensions.

Comme nous le verrons plus loin, les formes (5.1.3 et 5.1.4) sont très couramment utilisées dans la pratique.

On peut encore proposer une autre solution dans le cas où le substratum σ est horizontal. Si on prend $\sigma = 0$ comme plan de référence pour le potentiel, $h - \sigma = h$ est l'épaisseur de la nappe, et (5.1.2) s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} h \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy} h \frac{\partial h}{\partial y} \right] = \omega_d \frac{\partial h}{\partial t} + Q$$

Si l'on peut supposer $K_{xx} = K_{yy} = K$ constant dans l'espace (milieu isotrope et uniforme), ceci s'écrit:

$$\nabla^2 h^2 = \frac{2\omega_d}{K} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2Q}{K}$$

soit une équation en h^2 . Si l'on est en régime permanent ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$), l'équation est linéaire en h^2 . Nous nous en servons pour étudier l'écoulement autour d'un puits.

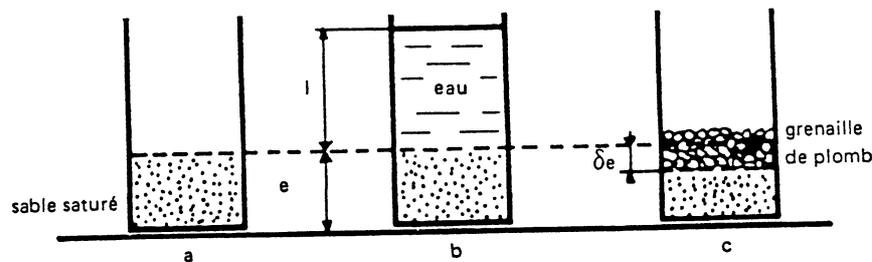
5.2. THEORIE DE LA CONSOLIDATION DE TERZAGHI. ACTION DE L'EAU INTERSTICIELLE SUR LES MILIEUX ROCHEUX.

Nous allons examiner d'abord les interactions entre solide et liquide en nous inspirant de Schneebeli. Ce paragraphe concerne surtout le Génie Civil pour des couches à faible profondeur. Le milieu est supposé formé de grains sans cohésion entre eux (sableux).

a) Contraintes effectives et pression neutre

Le milieu poreux est supposé saturé et ne contient que des grains (phase solide) et une phase liquide remplissant tous les interstices.

Quel est l'effet d'une charge extérieure appliquée sur un tel matériau ? Décrivons l'expérience de Terzaghi:



Dans le cas *b* (charge extérieure = colonne d'eau), la pression à la surface du milieu poreux est ρl . Elle ne provoque aucun tassement. Dans le cas *c* (charge extérieure = grenaille de plomb), la même pression sur le milieu poreux provoque un tassement δ_e .

Conclusion: Seules les charges appliquées directement sur le squelette solide provoquent des effets mécaniques sur le milieu poreux. L'effet d'une charge d'eau réside uniquement dans une augmentation de la pression du liquide imprégnant le sable et, comme les grains solides sont pratiquement incompressibles dans le domaine des pressions mises en jeu, il n'en résulte aucun effet apparent.

Définition: Terzaghi a appelé *contraintes effectives* celles qui sont transmises directement de grain à grain, comme dans le cas de la grenaille de plomb. Elles seules ont une action sur la phase solide, contrairement à la pression du liquide interstitiel qui est appelée *pression neutre*. Les *contraintes totales* appliquées au complexe solide-liquide se décomposent donc en *contraintes effectives* et *pression neutre*. On a:

$$\sigma = \bar{\sigma} + p$$

C'est l'équation de base de ce chapitre. Dans le cas le plus général, σ et $\bar{\sigma}$ sont des tenseurs comportant trois contraintes normales et trois contraintes tangentielles.

Hypothèses: Nous supposons, pour le paragraphe 5.2:

- le liquide incompressible, donc ρ constant,
- les grains solides du milieu incompressibles,
- le milieu poreux compressible par réduction de la porosité ω .

b) Soulèvement hydrostatique

Considérons une colonne de terrain sec de hauteur ℓ . La base de la colonne subit une pression correspondant au poids de la colonne de terrain. Par définition, c'est une contrainte effective puisqu'elle est transmise par les grains.

$$\bar{\sigma}_z = \rho_d g \ell = \rho_s (1 - \omega) g \ell$$

où $\bar{\sigma}_z =$ contrainte effective dans la direction verticale,
 $\rho_d =$ masse volumique du terrain sec,
 $\rho_s =$ masse volumique des grains solides de terrain,
 $\omega =$ porosité totale.

Notez qu'en mécanique des sols, on a l'habitude de travailler en poids spécifiques $\gamma = \rho g$, mais nous conserverons ici les notations habituelles en masse volumique.

La contrainte totale est ici égale à la contrainte effective, $\sigma_z = \bar{\sigma}_z$.

Si maintenant la colonne est saturée d'eau au repos, la contrainte totale à la base de la colonne sera (poids du terrain + poids de l'eau):

où
$$\sigma_z = \rho_s (1 - \omega) g \ell + \rho_w g \ell = \rho_w g \ell$$

 $\rho_w = \rho_s (1 - \omega) + \rho_w =$ masse volumique du terrain saturé,
 $\rho =$ masse volumique de l'eau.

La contrainte effective sera, d'après sa définition:

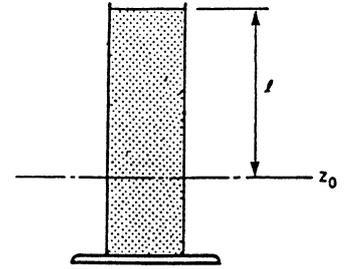
$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - p = \rho_w g \ell - \rho g \ell = (\rho_w - \rho) g \ell$$

Du point de vue mécanique, tout se passe comme si la masse volumique du terrain était:

$$\rho_a = \rho_w - \rho = (1 - \omega)(\rho_s - \rho)$$

ρ_a est la masse volumique apparente, ou encore déjàugée, du terrain saturé.

La réduction apparente de la masse volumique du sol n'est en fait que le résultat de la poussée d'Archimède de l'eau sur les grains. On lui donne le nom de *soulèvement hydrostatique*.



c) Pressions de courant ou poussée d'écoulement

Considérons un volume élémentaire $dx dz \times 1$ de milieu poreux où l'eau interstitielle est en mouvement avec une vitesse de filtration U dans le plan x, z .

Calculons, suivant Schneebeli, les résultantes des trois forces appliquées à l'élément:

- forces de pression dues au fluide,
- forces de pesanteur dues à la gravité,
- forces de contact grain à grain dues à la contrainte effective.

- Pressions: Sur la face AD agit une force normale, $p dz$,

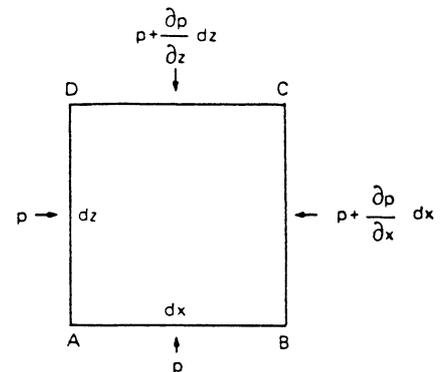
et sur BC , la force normale $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dz$

Leur résultante dirigée selon Ox est:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dz$$

De même, sur AB et CS , la résultante est:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx dz$$



soit une résultante générale des forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}} p$ par unité de volume.

- **Gravité:** La force de gravité sur l'élément a pour résultante: $-\rho_w g \overrightarrow{\text{grad}} z$.
- **Résultante de ces deux forces:** Introduisons la charge au lieu de la pression $h = \frac{p}{\rho g} + z$:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} p = -\rho g \overrightarrow{\text{grad}} h + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z$$

d'où la résultante:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= -\rho g \overrightarrow{\text{grad}} h + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z - \rho_w g \overrightarrow{\text{grad}} z \\ &= -\rho g \overrightarrow{\text{grad}} h - \rho_a g \overrightarrow{\text{grad}} z \end{aligned}$$

Les deux dernières forces, pesanteur et soulèvement hydrostatique, se combinent dans le terme de masse volumique déjaugée (ou apparente) ρ_a . Le premier terme $\rho g \overrightarrow{\text{grad}} h$ est baptisé *pression de courant* ou *poussée d'écoulement*. C'est une force de volume dirigée en sens inverse du gradient de charge, c'est-à-dire dans le sens de la vitesse de filtration \vec{U} si le milieu est isotrope.

La variation de contrainte effective équilibre ces poussées pour réaliser la stabilité de l'élément. En conclusion, l'écoulement de l'eau engendre des variations de la contrainte effective agissant sur la phase solide, dont il faut parfois tenir compte en génie civil.

Exemple: Renard

On réalise l'expérience suivante d'écoulement ascendant dans une colonne de sable. L'écoulement est uniforme et le gradient de charge est $\text{grad } h = H/\ell$ dirigé vers le haut. La résultante R de la poussée d'écoulement et de gravité est la force de volume:

$$(\rho_a - \rho \text{ grad } h) \vec{g}$$

Si on augmente graduellement la charge H , il viendra un moment où cette force de volume s'annulera: le sable devient en apparence soustrait à la pesanteur: il est devenu "boulant". Un objet lourd posé sur la colonne s'y enfoncera. Si on augmente encore H , la colonne entière de sable se soulève: on a créé un "renard". Le gradient critique correspondant à la disparition de toute force de volume est:

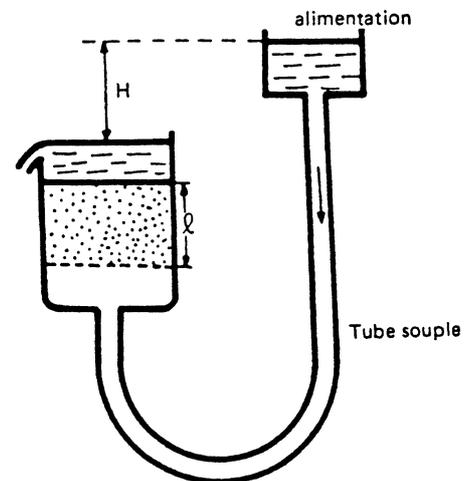
$$\text{grad } h = \frac{\rho_a}{\rho}$$

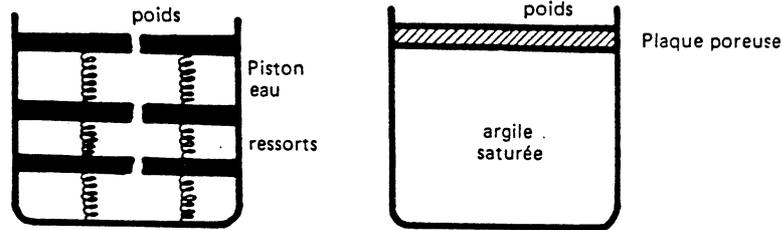
Ceci est fondamental en mécanique des sols. Considérons, par exemple, une digue en terre homogène sans masque d'étanchéité. A première vue, on pourrait penser que la face amont de la digue est soumise à la poussée hydrostatique de l'eau de la retenue. C'est entièrement faux. En effet, la pression agissant sur un élément du parement amont est une *pression neutre* qui n'est donc pas transmise par les grains solides. La poussée de l'eau ne se transmet pas sur le parement amont de la digue, mais se décompose en un système de forces de volume agissant sur la totalité du volume saturé. La résistance de la digue dépendra d'une façon essentielle des caractéristiques de l'écoulement de filtration à travers la digue, qu'il faudra donc calculer.

d) Théorie de la consolidation suivant Terzaghi

Lorsque l'on charge certains terrains peu perméables saturés d'eau, on ne constate a priori que peu ou pas de tassement. Toutefois, le tassement final obtenu au bout d'un temps parfois très long est considérable. Ce phénomène de tassement dans le temps est appelé *consolidation*. Il se manifeste surtout dans le cas de terrains argileux.

Terzaghi a montré que la consolidation s'explique par l'écoulement lent de l'eau interstitielle contenue dans le sol ainsi que le montre l'analogie des pistons percés:





Si le récipient est vide, la surcharge appliquée est intégralement encaissée par les ressorts qui vont se raccourcir: le tassement est instantané et élastique. Mais si le récipient est plein d'eau et si les trous des pistons sont très petits, l'enfoncement des pistons ne se fera pas immédiatement: la surcharge sera initialement encaissée par une augmentation de pression d'eau (sans tassement si l'eau est considérée comme incompressible) qui s'échappera peu à peu du système et laissera aux ressorts le soin d'encaisser la surcharge en se tassant.

De même, le tassement de l'argile saturée (essai à l'œdomètre) se fera par expulsion d'eau qu'il faut drainer par l'intermédiaire de la plaque poreuse:

La théorie de consolidation suppose que:

- i) l'écoulement de l'eau intersticielle suit la loi de Darcy;
- ii) la perméabilité K du terrain ne varie pas au cours de la consolidation (ce qui n'est qu'une approximation de la réalité);
- iii) l'eau et les éléments solides de terrain sont incompressibles, une compression correspond donc à une diminution de la porosité;
- iiii) la compressibilité du sol (diminution de la porosité) est "élastique", c'est-à-dire qu'il existe une relation linéaire entre contrainte de compression effective et diminution du volume du sol. C'est aussi une approximation de la réalité (voir paragraphe suivant).

Le mécanisme de la consolidation suppose qu'une surcharge extérieure appliquée au sol est encaissée en partie par la phase solide (augmentation de contrainte effective), et en partie par l'eau intersticielle (augmentation de la pression). Sous l'effet de cette augmentation de pression, un écoulement transitoire prend naissance, il y a drainage de l'eau et augmentation progressive de la contrainte effective, d'où tassement.

Nous allons chercher à établir l'équation d'état du sol. Pendant la consolidation, les charges extérieures restent constantes, ainsi que la contrainte totale qui en est le résultat.

$$\sigma = \bar{\sigma} + p = \text{constante}$$

donc

$$d\bar{\sigma} + dp = 0 \quad (5.2.1)$$

Au début de la consolidation, la surpression est entièrement encaissée par p , elle se transforme peu à peu en augmentation de contrainte effective jusqu'à ce que la pression revienne à une répartition hydrostatique (absence d'écoulement).

D'après l'hypothèse 4i, la variation relative de volume d'un élément du sol doit s'écrire:

$$\boxed{-\frac{dV}{V} = \alpha d\bar{\sigma}} \quad (5.2.2)$$

avec: α = coefficient de compressibilité spécifique du sol, $[M^{-1}L^1T^2]$
 $\bar{\sigma}$ = contrainte effective.

D'après l'hypothèse 3i, la variation de volume de l'élément est entièrement due à la variation de sa porosité: si V est le volume total de l'élément de sol, notons V_P le volume des pores et V_S le volume de la phase solide:

$$V = V_S + V_P \quad \text{et} \quad dV = dV_P$$

Nous allons calculer, selon cette hypothèse, $\frac{dV}{V}$ en fonction de $d\omega$. Il vient:

$$\omega = \frac{V_P}{V_S + V_P} \quad (\text{porosité totale})$$

$$d\omega = \frac{V_S + V_P - V_P}{V^2} dV_P$$

$$d\omega = \frac{1 - \omega}{V} dV_P = (1 - \omega) \frac{dV}{V}$$

soit, en tenant compte de (5.2.1) et (5.2.2):

$$d\omega = (1 - \omega)\alpha dp$$

Et si l'on s'intéresse aux dérivées locales de ces grandeurs (système de coordonnées d'Euler):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (1 - \omega)\alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.2.3)$$

qui nous servira à décrire le comportement du milieu poreux.

Le tassement est directement donné par (5.2.2) si l'on connaît la variation de contrainte effective. Or celle-ci est calculable par (5.2.1) si l'on connaît l'évolution de la pression. Il faut donc calculer l'évolution transitoire de la pression dans le terrain.

Nous allons choisir la pression comme inconnue principale, et écrire l'équation de la consolidation à partir:

- de l'équation de continuité (3.2.3): $\text{div}(\rho \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \rho q = 0$

- de la loi de Darcy (4.1.6): $\vec{U} = -\frac{\bar{K}}{\rho g} [\text{grad } p + \rho g \text{ grad } z]$

- de l'équation d'état de l'eau (5.2.4): $\rho = \text{constante}$ (fluide incompressible)

- de l'équation d'état du milieu poreux (5.2.3): $\frac{\partial \omega}{\partial t} = (1 - \omega)\alpha \frac{\partial p}{\partial t}$

Ces équations se combinent aisément. Rapidement, il vient:

$$(3.2.3) + (5.2.4) \rightarrow \text{div } \vec{U} + \frac{\partial \omega}{\partial t} + q = 0$$

$$\text{id} + (5.2.3) \rightarrow -\text{div } \vec{U} = (1 - \omega)\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + q$$

$$\text{id} + (4.1.6) \rightarrow \boxed{\text{div}(\bar{K} \text{ grad } p) = \rho g (1 - \omega)\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g q} \quad (5.2.5)$$

car, ρg étant constant, $\text{div}(\text{grad } z) = 0$.

C'est l'équation de la consolidation. Rappelons que q représente le débit prélevé (ou apporté s'il est négatif) par unité de volume dans le milieu poreux. Il est ici généralement nul.

Si la perméabilité K est isotrope et constante, l'équation se simplifie en:

$$\nabla^2 p = \frac{(1-\omega)\alpha\rho g}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.2.6)$$

∇^2 étant l'opérateur Laplacien et le débit q étant supposé nul.

Le coefficient $C_V = \frac{(1-\omega)\alpha\rho g}{K}$ est appelé coefficient de consolidation, $[L^{-2}T^{-1}]$. On néglige parfois le terme $(1-\omega)$ devant 1.

Freeze (1979) donne les ordres de grandeur suivants pour la compressibilité des sols:

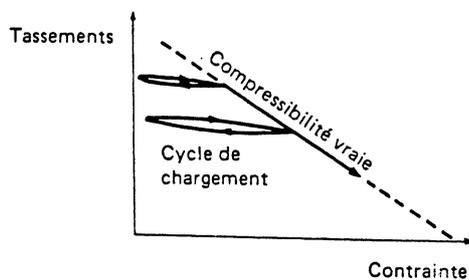
argiles	$\alpha = 10^{-6}$ à 10^{-8} en m^2/Newton , ou Pascal^{-1}
sables	$\alpha = 10^{-7}$ à 10^{-9} en m^2/Newton , ou Pascal^{-1}
graviers	$\alpha = 10^{-8}$ à 10^{-10} en m^2/Newton , ou Pascal^{-1}
roches fissurées	$\alpha = 10^{-8}$ à 10^{-10} en m^2/Newton , ou Pascal^{-1}
roches compactes	$\alpha = 10^{-9}$ à 10^{-11} en m^2/Newton , ou Pascal^{-1}

Une fois calculée l'évolution de la pression p , on connaît donc celle de la contrainte effective $\bar{\sigma}$ par $\bar{\sigma} + p = \text{constante}$. On en déduit les tassements par:

$$\alpha \Delta \bar{\sigma} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

ℓ étant l'épaisseur de la couche qui se consolide si le tassement s'effectue uniquement suivant la direction verticale.

Notez que dans les milieux argileux, la compression n'est en principe élastique qu'en toute première approximation. En particulier, les tassements ne sont pas réversibles. Une argile soumise à des cycles de compression accuse un changement de pente dans son tassement quand la contrainte atteint ou dépasse la contrainte maximum que l'argile a déjà atteinte, appelée contrainte de consolidation:

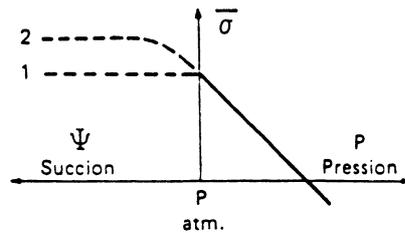


Pour cette raison, les tassements en milieux poreux, dus à des pompages, ne sont que très faiblement réversibles si la pression est rétablie et la contrainte diminuée.

Il faut noter enfin que dans quelques rares cas, où existeraient des pores non connectés où les pressions ne se transmettent pas, la relation $\sigma = \bar{\sigma} + p$ n'est plus valable: une augmentation de contrainte totale σ peut presque entièrement être immédiatement supportée par la contrainte effective $\bar{\sigma}$.

e) Contrainte effective en milieu non saturé

Nous avons vu qu'en milieu saturé, à contrainte totale constante, il existe une relation linéaire de pente -1 entre p et $\bar{\sigma}$. Mais en non saturé, quand la pression devient inférieure à la pression atmosphérique, cette relation devient plus complexe. Elle est résumée par le graphique suivant (Freeze, 1979):



Bishop (1959) propose la relation:

$$\bar{\sigma} = \sigma - p(\text{air}) - \alpha(p(\text{eau}) - p(\text{air}))$$

avec $\alpha = 1$ à saturation, $\alpha = 0$ à sec, et des valeurs intermédiaires en fonction de la teneur en eau.

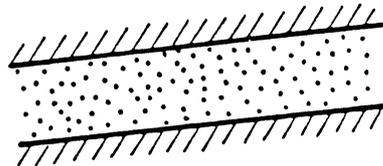
On constate en effet empiriquement qu'en 1^{ère} estimation, le sol non saturé ne supporte la contrainte totale que par la contrainte effective (courbe 1); la pression ne joue pas de rôle.

En réalité, le comportement réel est plus proche de la courbe 2, laquelle est fonction de la structure du sol, et de l'historique d'humidification et de drainage du sol.

5.3. EQUATION DE DIFFUSIVITE GENERALE: CAS DE LA NAPPE CAPTIVE

La théorie complète n'est pas très simple à établir, et c'est pourquoi nous l'avons laissée en dernier. Il faut en effet supposer le fluide compressible et le milieu poreux compressible, aussi bien pour les pores que pour les grains solides. Mais si le milieu poreux est compressible, il faut en toute rigueur tenir compte de son déplacement dans l'équation de continuité: dans le volume élémentaire fixe en coordonnées d'Euler, dans lequel nous ferons le bilan, nous aurons un flux de grains solides aussi bien que de fluide.

Nous supposons en outre le milieu poreux entièrement saturé en fluide, car l'équation complète où les trois compressibilités interviennent n'a de sens qu'en nappe captive profonde, c'est-à-dire en couche aquifère confinée entre deux imperméables:



Nous utiliserons:

a) l'équation de continuité du fluide dans un volume élémentaire fixe de l'espace:

$$\text{div}(\rho \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \rho q = 0 \quad (3.2.3)$$

b) l'équation de continuité du flux de grains solides dans le même volume élémentaire de l'espace.

Si nous définissons pour le solide les mêmes quantités moyennes que pour le fluide:

$$\langle \rho_s \rangle = \frac{1}{1 - \langle \omega \rangle} \int \rho_s m dx'$$

ρ_s masse volumique du solide valant: $\begin{cases} - 0 \text{ dans les pores} \\ - \text{celle du solide dans les grains} \end{cases}$

$$\langle \vec{u}_S \rangle = \frac{1}{\langle \rho_S \rangle} \int \rho_S \vec{u}_S m dx'$$

\vec{u}_S vitesse réelle du solide valant: $\begin{cases} - 0 \text{ dans les pores} \\ - \text{celle de chaque point du solide dans les grains} \end{cases}$

On peut montrer, par exactement le même raisonnement que pour le fluide, que l'équation de continuité du solide s'écrit:

$$\text{div} [\langle \rho_S \rangle \langle \vec{u}_S \rangle] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \langle \omega \rangle) \langle \rho_S \rangle] = 0$$

En laissant tomber les signes de moyennes $\langle \rangle$ pour simplifier les notations, on écrira:

$$\text{div} [\rho_S \vec{U}_S] + \frac{\partial}{\partial t} [(1 - \omega) \rho_S] = 0 \quad (5.3.1)$$

$\vec{U}_S = \langle \vec{u}_S \rangle$ est la vitesse fictive de déplacement du solide, comme si toute la section lui était offerte.

On définira, de même que pour le fluide, une "vitesse macroscopique moyenne" du solide, en disant que \vec{u}_S est nul dans les pores.

$$\vec{u}^*_S = \frac{\vec{U}_S}{1 - \omega}$$

c) La loi de Darcy

Dans sa forme classique, elle s'applique en fait à la vitesse moyenne réelle du liquide ($\vec{u}^* = \frac{\vec{U}}{\omega}$) par rapport à celle du solide ($\vec{u}^*_S = \frac{\vec{U}_S}{(1 - \omega)}$), et non par rapport à l'espace fixe*. Il faut donc composer géométriquement les vitesses \vec{u}^* et \vec{u}^*_S pour obtenir l'expression exacte de la loi de Darcy: c'est $(\vec{u}^* - \vec{u}^*_S)$ qui est proportionnelle au gradient de pression et à la gravité, ou encore $(\vec{U} - \omega \vec{u}^*_S)$ (voir Remson, Cooper, Biot, Assens).

De l'expression générale (4.1.6) de la loi de Darcy, on tire:

$$\vec{U} - \omega \vec{u}^*_S = -\frac{\bar{k}}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \quad (5.3.2)$$

d) Combinons l'équation de continuité (3.2.3) avec (5.3.1) et (5.3.2)

Nous supposons que toutes les grandeurs $\rho, \rho_S, p, \omega, U, U_S$ sont des fonctions d'Euler, c'est-à-dire rapportées en un point fixe de l'espace par rapport au référentiel. Il vient:

$$(3.2.3) + (5.3.2) \quad \text{div} \left[\rho \frac{\bar{k}}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \right] = \text{div} (\rho \omega \vec{u}^*_S) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \rho q$$

$$\text{or} \quad \text{div} (\rho \omega \vec{u}^*_S) = \rho \omega \text{div} \vec{u}^*_S + \vec{u}^*_S \overrightarrow{\text{grad}} (\rho \omega)$$

$$\text{et} \quad \vec{u}^*_S \overrightarrow{\text{grad}} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) = \frac{d}{dt} (\rho \omega)$$

* En toute rigueur, il faudrait utiliser ici la porosité cinématique ω_c et non la porosité totale ω . Nous faisons ici une petite approximation.

c'est-à-dire la *dérivée de transport*** de $\rho\omega$ en suivant le déplacement moyen du solide, à la vitesse u_S^* . Nous chercherons donc les variations de ω et ρ à l'intérieur du domaine élémentaire constitué par le solide qui se déforme, c'est-à-dire contenant une quantité constante de solide.

De plus, en remplaçant dans (5.3.1) \vec{U}_S par $(1-\omega)\vec{u}_S^*$, il vient:

$$(1-\omega)\rho_S \operatorname{div} \vec{u}_S + \vec{u}_S^* \operatorname{grad} [(1-\omega)\rho_S] + \frac{\partial}{\partial t} [(1-\omega)\rho_S] = 0$$

soit de même:

$$(1-\omega)\rho_S \operatorname{div} u_S^* + \frac{d}{dt} [(1-\omega)\rho_S] = 0$$

soit finalement, en combinant:

$$\operatorname{div} \left[\frac{\rho \bar{k}}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho g \operatorname{grad} z) \right] = \omega \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{1-\omega} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\rho\omega}{\rho_S} \frac{d\rho_S}{dt} + \rho q \quad (5.3.3)$$

e) Les équations d'état du liquide et du solide

Nous choisissons comme seule inconnue la pression p . Il faut donc estimer $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\rho_S}{dt}$ dans l'élément de milieu poreux mobile (qui se déforme), mais contenant une quantité constante de solide.

- Pour le liquide, nous la connaissons, c'est l'équation de compressibilité isotherme (3.1.3):

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_l(p-p_0)}$$

soit encore:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \beta_l \frac{dp}{dt} \quad (5.3.4)$$

β_l est facilement accessible à la mesure.

- Pour le solide, les choses se compliquent et il faut faire deux pages de calcul, et définir une armée de coefficients, pour s'en sortir. Allons-y sans oublier le but fixé: exprimer $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\rho_S}{dt}$ en fonction de $\frac{dp}{dt}$.

Contrairement à la théorie de la consolidation exposée plus haut, les volumes de pores et de solides vont dépendre non seulement de la contrainte effective $\bar{\sigma}$, mais aussi de la pression p . Notons:

$$\begin{cases} V = \text{volume total de l'élément de M.P. mobile,} \\ V_S = \text{volume du solide,} \\ V_P = \text{volume des pores} (V = V_S + V_P) \end{cases}$$

On définit:

i) le coefficient de compressibilité des grains solides par:

$$\frac{dV_S}{V_S} = -\frac{d\rho_S}{\rho_S} = -\beta_S dp \quad (5.3.5)$$

le produit $\rho_S V_S$ = masse de solide étant une constante dans l'élément de M.P. mobile; β_S est mesurable sur des minéraux purs ou à la cellule triaxiale (voir plus loin).

** ou encore dérivée particulière: c'est la variation dans l'intervalle de temps élémentaire d'une propriété (ici $\rho\omega$) en un point qui se déplace avec les grains solides. On la note comme une dérivée totale d/dt .

ii) *Compressibilité de la matrice poreuse*: La théorie de l'élasticité des milieux continus, valable également pour les milieux poreux, exprime qu'il existe une relation linéaire entre le tenseur des déformations et le tenseur des accroissements de contraintes effectives. On se place le plus souvent dans le cas d'un milieu isotrope du point de vue des propriétés mécaniques, c'est-à-dire défini par deux coefficients seulement, le module d'Young, E , et le coefficient de Poisson, ν . Cette hypothèse n'est cependant pas indispensable.

Si $\Delta\bar{\sigma}_i$ sont les trois accroissements de contraintes effectives normales dans les trois directions principales (i, j, k) du tenseur des accroissements de contraintes, et si ε_i sont des déformations relatives dans ces mêmes directions:

$$\left(\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} \right) \quad l : \text{élément de longueur}$$

la théorie de l'élasticité s'écrit:

$$-\varepsilon_i = \frac{1}{E} \Delta\bar{\sigma}_i - \frac{\nu}{E} (\Delta\bar{\sigma}_j + \Delta\bar{\sigma}_k)$$

La dilatation volumique est la somme des trois déformations relatives:

$$-\frac{\Delta V}{V} = -\Sigma \varepsilon_i = \frac{1}{E} (\Sigma \Delta\bar{\sigma}_i) - \frac{2\nu}{E} (\Sigma \Delta\bar{\sigma}_i)$$

Notons $\Delta\bar{\sigma}$ l'accroissement moyen des contraintes: $\Delta\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \Sigma \Delta\bar{\sigma}_i$

Alors:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} \Delta\bar{\sigma}$$

Le signe moins signifie que le volume V diminue si la contrainte effective $\bar{\sigma}$ augmente (compression).

On voit donc que l'anisotropie éventuelle de l'accroissement de contraintes est sans importance, c'est l'augmentation moyenne de contraintes effectives qui importe. Quand nous parlerons d'augmentation de contrainte, ce sera donc toujours de contrainte moyenne que nous parlerons, pour un milieu isotrope.

Il existe donc une relation linéaire entre $\frac{dV}{V}$ et $d\bar{\sigma}$. C'est celle que nous avons notée:

$$\frac{dV}{V} = -\alpha d\bar{\sigma} \quad (5.2.2) \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

dans la théorie de la consolidation. Il faut bien voir que, dans cette théorie, on suppose que la contrainte totale σ est une constante: le coefficient α est défini pour une *transformation particulière* de l'état de contrainte de la roche, d'où $d\bar{\sigma} + dp = 0$. Il est accessible par une mesure directe sur échantillon à la cellule triaxiale.

Admettant que V , V_S et V_P sont des fonctions de $\bar{\sigma}$ et p , on pose alors a priori des lois de compressibilité linéaires en dp et $d\bar{\sigma}$, telles que celle de l'élasticité ci-dessus. En fait, on a l'habitude de les écrire en dp et $d\sigma$, pression et contrainte totale, ce qui simplifie les calculs. On peut toujours revenir à $d\bar{\sigma}$ par:

$$d\sigma = d\bar{\sigma} + dp$$

On écrit:

$$\begin{cases} \frac{dV}{V} = -C d\sigma + \alpha dp \\ \frac{dV_P}{V_P} = -C_P d\sigma + \alpha_P dp \\ \frac{dV_S}{V_S} = -C_S d\sigma + \alpha_S dp \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Ces six coefficients de compressibilité relatifs sont positifs. Le coefficient α de (5.3.6) est bien le même que celui de (5.2.2) rappelé ci-dessus, car si nous faisons une transformation de l'état de contrainte à $d\sigma = 0$, c'est-à-dire $dp = -d\bar{\sigma}$, la 1^{ère} équation (5.3.6) donne: $\frac{dV}{V} = -\alpha d\bar{\sigma}$.

Ces coefficients ne sont pas indépendants: nous allons montrer que l'on peut établir entre eux les relations suivantes:

$$\begin{cases} C &= \alpha + \beta_S \\ C_P &= \frac{\alpha}{\omega} \\ \alpha_P &= \frac{\alpha}{\omega} - \beta_S \\ \alpha_S &= \frac{\omega}{1-\omega} \beta_S \\ C_S &= \frac{\beta_S}{1-\omega} \end{cases} \quad (5.3.7)$$

Preuve: Les équations (5.3.6) sont générales. Faisant, pendant la durée de cette "preuve", abstraction des conditions réelles de variation des contraintes que nous rencontrerons en hydrogéologie, nous allons tirer les cinq relations (5.3.7) entre les six coefficients en faisant subir par la pensée trois transformations particulières au milieu poreux. Si nous mettons ainsi des relations en évidence entre les coefficients, ces relations seront générales puisque, par définition, ces coefficients sont constants.

- 1^{ère} transformation: Supposons que $d\sigma = 0$ (contrainte totale constante):

$$\frac{dV}{V} = \alpha dp \quad , \quad \frac{dV_P}{V_P} = \alpha_P dp \quad , \quad \frac{dV_S}{V_S} = \alpha_S dp$$

Nous avons de plus: $V = V_P + V_S$

soit, en différenciant: $dV = dV_P + dV_S$

ou encore: $\frac{dV}{V} = \frac{V_P}{V} \frac{dV_P}{V_P} + \frac{V_S}{V} \frac{dV_S}{V_S} = \omega \frac{dV_P}{V_P} + (1-\omega) \frac{dV_S}{V_S}$

La première relation s'écrit donc:

$$\alpha = \omega \alpha_P + (1-\omega) \alpha_S$$

- 2^{ème} transformation: Supposons $d\bar{\sigma} = 0$ (contrainte effective constante). L'arrangement des grains de la matrice poreuse est en fait fonction de la seule contrainte effective: si on l'augmente, le milieu se tasse, et inversement. Donc, dans le cas présent, cet arrangement ne changera pas. La variation de volume du milieu poreux qui peut intervenir sera uniquement due à la dilatation ou à la contraction des grains, le milieu se déformera de façon homotétique. La porosité ω du milieu ne doit donc pas varier.

De $\omega = \frac{V_P}{V}$, on déduit:

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 = \frac{V dV_P - V_P dV}{V^2} \\ \text{d'où} \quad \frac{dV_P}{V_P} &= \frac{dV}{V} = \frac{dV - dV_P}{V - V_P} = \frac{dV_S}{V_S} \end{aligned}$$

en tenant compte de $V = V_P + V_S$

Or, si $d\bar{\sigma} = 0$, on a $d\sigma = dp$,

$$\text{donc:} \quad \frac{dV_S}{V_S} = (\alpha_S - C_S) dp \quad \text{et} \quad \frac{dV_P}{V_P} = (\alpha_P - C_P) dp \quad \text{et} \quad \frac{dV}{V} = (\alpha - C) dp$$

Mais nous avons déjà défini le coefficient de compressibilité du solide:

$$\frac{dV_S}{V_S} = -\beta_S dp$$

défini sur un minéral isolé, c'est-à-dire effectivement quand $d\bar{\sigma} = 0$.

Les trois relations suivantes en découlent:

$$\beta_S = C_S - \alpha_S = C_P - \alpha_P = C - \alpha$$

- 3^{ème} transformation: Geertsma (1957) propose d'utiliser le théorème de Maxwell-Betti (dit encore de Betti et Rayleigh) qui s'énonce ainsi:

“Etant donné deux charges hydrostatiques élémentaires imposées $d\sigma$ et dp , le travail des forces dues à la première charge dans le déplacement dû à la deuxième est égal au travail des forces dues à la deuxième dans le déplacement dû à la première”

$$\left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{d\bar{\sigma}} dp \right] d\sigma = - \left[\left(\frac{\partial V_P}{\partial \sigma} \right)_p d\sigma \right] dp$$

Les parenthèses rappellent que les dérivées sont prises à $\bar{\sigma}$ et p constant respectivement.

En effet, le travail de la contrainte totale porte sur tout le volume V , ($\Delta V d\sigma$) tandis que le travail de la pression ne porte que sur le volume des pores où cette pression se manifeste ($\Delta V_P dp$).

Ce théorème est une conséquence directe de la linéarité des équations de compression que nous avons admise (élasticité). On le démontre à partir du calcul de l'énergie potentielle élastique:

$$2V = \Sigma \bar{\sigma}_i \varepsilon_i + p \Sigma \varepsilon_i$$

qui est une forme quadratique des déformations ε_i . Voir les cours de mécanique des milieux continus pour plus de détails.

Ce théorème nous donne directement:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = - \frac{\partial V_P}{\partial \sigma}$$

soit $\alpha V = C_P V_P$

ou $\alpha = \omega C_P$

En arrangeant, nous avons donc établi les cinq relations (5.3.7).

Revenons à nos inconnues $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\rho_S}{dt}$. Nous allons faire l'hypothèse, pour étudier le volume élémentaire de milieu poreux mobile, que la contrainte totale ne varie pas, ce qui est généralement bien réalisé dans la pratique dans la mise en exploitation des nappes captives profondes: la contrainte totale due au poids des terrains sus-jacents ne varie pas.

i) $\frac{d\omega}{dt}$

Nous pouvons écrire: $V_S = (1 - \omega)V$

d'où en différenciant: $dV_S = (1 - \omega)dV - Vd\omega$

ou: $\frac{V_S}{V} \frac{dV_S}{V_S} = (1 - \omega) \frac{dV}{V} - d\omega$

soit: $d\omega = (1 - \omega) \left(\frac{dV}{V} - \frac{dV_S}{V_S} \right)$

D'après (5.3.6), en y faisant $d\sigma = 0$, il vient:

$$d\omega = (1 - \omega)(\alpha - \alpha_S)dp$$

que nous pouvons exprimer en terme de dérivée de transport puisque ω et p sont tous deux mesurés dans un même repère Lagrangien se déplaçant à la vitesse du solide:

$$\frac{d\omega}{dt} = (1 - \omega)(\alpha - \alpha_S) \frac{dp}{dt}$$

ii) $\frac{d\rho_S}{dt}$

La conservation de la masse solide dans le volume élémentaire mobile s'écrit:

$$d(\rho_S V_S) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\rho_S}{\rho_S} + \frac{dV_S}{V_S} = 0$$

Soit de même, d'après (5.3.6), avec $d\sigma = 0$, et en prenant la dérivée de transport, ρ_S et p étant rapportés au même repère lié au solide:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -\rho_S \alpha_S \frac{dp}{dt}$$

Nous avons fait le tour des équations d'état du milieu poreux.

f) Synthèse: l'équation de diffusivité. Simplifications

Introduisant ces trois équations d'état dans l'équation (5.3.3) et tenant compte de la valeur de α_S tirée de (5.3.7), il vient:

$$\text{div} \left[\frac{\bar{k}\rho}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \right] = \rho\omega \left[\beta_l - \beta_S + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{dp}{dt} + \rho g$$

soit, en multipliant par g :

$$\text{div} \left[\bar{K} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \right] = \rho\omega g \left[\beta_l - \beta_S + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{dp}{dt} + \rho g g \quad (5.3.8)$$

Le coefficient $S_s = \rho\omega g \left[\beta_l - \beta_S + \frac{\alpha}{\omega} \right]$ est baptisé *coefficient d'emménagement spécifique* de la nappe (sa dimension est $[L^{-1}]$). On y néglige généralement le terme β_S qui est de l'ordre de $\frac{1}{25}\beta_l$, alors que α est du même ordre de grandeur que β_l , qui vaut environ 5×10^{-10} MKS (dimension $[M^{-1}LT^2]$).

Simplifications:

On substitue généralement la charge h à la pression p dans l'équation (5.3.8) en faisant l'hypothèse, admissible dans la pratique, que ρ est variable dans le temps (compressibilité), mais peu variable dans l'espace, afin de pouvoir sortir le terme ρg de l'opérateur divergence:

$$\text{div} \left[\bar{K} (\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\text{grad}} z) \right] \simeq \rho g \text{div} \left[\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \right] = \rho g \text{div} \left(\bar{K} \overrightarrow{\text{grad}} h \right)$$

D'autre part, comme \vec{u}_S^* , la vitesse du solide, est très faible, on néglige le terme $\vec{u}_S^* \text{grad } p$ devant $\frac{\partial p}{\partial t}$, et on écrit:

$$\rho g \operatorname{div} (\overline{K} \operatorname{grad} h) = S_s \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g q$$

On peut également dire que l'on garde l'équation en dérivée totale, car les instruments de mesure (piézomètres...) étant liés au solide, c'est en fait $\frac{dp}{dt}$ et non $\frac{\partial p}{\partial t}$ que l'on sait mesurer. De plus, en différenciant l'expression $p = \rho g(h - z)$, il vient:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + g(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

soit, en tenant compte de (5.3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \beta_l \frac{\partial p}{\partial t} \\ \rho g \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} [1 + \rho g(z - h) \beta_l] \end{aligned}$$

On peut négliger $\rho g(z - h) \beta_l$ devant 1: en effet, pour $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\beta_l = 5 \cdot 10^{-10} \text{ MKS}$ et $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; ce terme est inférieur à 1/100 tant que $(h - z)$ est inférieur à 2000 m. Alors:

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial t} \simeq \frac{\partial p}{\partial t}$$

En substituant dans (5.3.8) et en simplifiant par ρg , il vient:

$$\operatorname{div} (\overline{K} \operatorname{grad} h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + q \quad (5.3.9)$$

équation de diffusivité utilisée pour les nappes captives.

On peut se ramener parfois à un problème plan en considérant que, dans la nappe captive, la charge h ne varie pas sur une perpendiculaire aux épontes, comme nous l'avons fait pour la nappe libre, pour la direction verticale. On intègre K , en supposant qu'une direction principale d'anisotropie est ladite perpendiculaire aux épontes, et que x et y sont les deux autres, appartenant au plan des épontes:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \int_{\text{substratum}}^{\text{toit}} K_{xx} dz & T_{yy} &= \int_{\text{substratum}}^{\text{toit}} K_{yy} dz \\ S &= \int_{\text{substratum}}^{\text{toit}} S_s dz & Q &= \int_{\text{substratum}}^{\text{toit}} q dz \end{aligned}$$

S est le coefficient d'emmagasinement de la nappe (il est sans dimension). En particulier, si K_{xx} , K_{yy} et S_s sont constants sur toute l'épaisseur e de la nappe captive:

$$T_{xx} = K_{xx} e \quad , \quad T_{yy} = K_{yy} e \quad , \quad S = S_s e = \rho \omega g e \left(\beta_l \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

S varie grossièrement entre 10^{-3} et 10^{-5} .

Il vient alors, substratum et toit étant supposés parallèles pour pouvoir négliger leur variation d'écartement dans l'espace lors de l'intégration (voir drainage, § 8.3):

$$\operatorname{div} (\overline{T} \operatorname{grad} h) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (5.3.10)$$

équation dont nous nous servons continuellement.

Si enfin, T est isotrope et constant dans l'espace:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{T} \quad (5.3.11)$$

Le rapport T/S est appelé diffusivité de l'aquifère. Ces équations sont identiques à celles de la nappe libre, mais S remplace ici la porosité ω_d . Il faut bien voir cependant, que même si les deux équations nappe libre-nappe captive sont identiques, les mécanismes mis en jeu (mouvement de la surface libre dans un cas, compressibilité de l'eau, des grains et du sol dans l'autre) sont distincts, de même que la façon d'établir les équations et les approximations faites.

5.4. CAS DES SOLS TRÈS COMPRESSIBLES

Gambolati (1973), étudiant les tassements à Venise sous l'influence des pompages de Mestre, a établi une expression légèrement différente du coefficient d'emmagasinement pour les sols très compressibles (vases, ...).

Il suppose que les grains sont incompressibles ($\rho_S = \text{cst}$), mais que le coefficient de compressibilité du milieu poreux, α , est important. Son analyse est de plus limitée à un écoulement monodimensionnel vertical. Il définit la dilatation linéaire, au lieu de la dilatation volumique:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = -\alpha \Delta \bar{\sigma} = \alpha \Delta p \quad \text{si } \Delta \sigma = 0$$

De plus, on peut exprimer cette dilatation comme la différentielle, en coordonnées de Lagrange, du vecteur position du point considéré:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta r}{\Delta \zeta}$$

lié à la vitesse \vec{u}_S^* du solide.

Enfin, il exprime la vitesse u_S^* par:

$$\vec{u}_S^* = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

ce qui sous-entend que \vec{r} désigne un point "moyen" du milieu poreux, puisque \vec{u}_S^* est une vitesse moyenne.

Il combine ensuite, comme plus haut, les équations de continuité du liquide et du solide qui se déplace. Mais, au lieu de fournir le résultat dans (5.3.3), en $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$, (avec $\frac{d\rho_S}{dt} = 0$), il choisit comme inconnue $\frac{d\rho}{dt}$ et $\text{div } \vec{u}_S^*$.

Comme le tassement se fait à une dimension suivant z , il calcule la composante en z , $\frac{\partial u_{zS}^*}{\partial \zeta}$, exprimée en coordonnées d'Euler, à partir de:

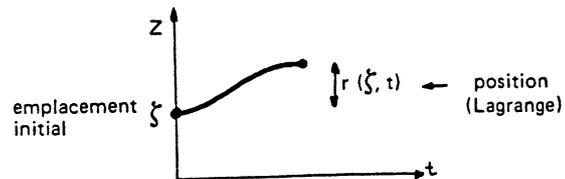
$$\frac{\partial r_{zS}}{\partial \zeta} = \varepsilon_z = \alpha \Delta p \quad \text{en coordonnées de Lagrange}$$

$$\frac{\partial r_{zS}}{\partial t} = u_{zS}^*$$

$$z \text{ (Euler)} = \zeta + r(\zeta, t) \quad \text{(Lagrange)}$$

Il obtient finalement:

$$\frac{\partial u_{zS}^*}{\partial z} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(p - p_0)} \frac{dp}{dt}$$



Dans le coefficient d'emmagasinement, α doit donc être remplacé par $\frac{\alpha}{1 + \alpha(p - p_o)}$. Ce terme devient important à prendre en compte si $\alpha(p - p_o) > 0,05$, ce qui représente donc un tassement ε_z de plus de 5%. Cet effet est donc négligeable, sauf pour des cas particuliers de subsidences importantes (à Mexico, par exemple, les tassements dus aux pompages, dans une formation très peu consolidée, ont atteint des valeurs de plusieurs mètres).

Du point de vue théorique, cette différence de résultat provient du passage du système (5.3.6) des trois compressibilités du volume total, solide et pores, aux relations linéaires en terme de dérivée de transport, $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\rho_s}{dt}$, fonctions de $\frac{dp}{dt}$, qui n'est pas entièrement satisfaisant. Mais le résultat de Gambolati, plus rigoureux, n'est pas transposable à trois dimensions.

Gambolati montre aussi que la variation de la perméabilité avec la variation de ρ (terme $\text{grad } \rho g$) que nous avons négligé en simplifiant pour obtenir (5.3.9) est effectivement négligeable si l'épaisseur de l'aquifère est inférieure à 10.000 m, et la variation de pression inférieure à 500 bars, ce qui est bien au-delà des gammes habituelles.

Cependant, dans les sols très compressibles, il faudrait probablement prendre en compte la variation de K avec le tassement (quand les pores se referment), phénomène qui a été très peu étudié.

5.5. AUTRES EQUATIONS DE DIFFUSIVITE

Nous avons traité les trois cas les plus importants. Cependant, il existe d'autres cas où des équations différentes existent:

- mouvement de l'eau dans la zone non saturée: voir § 9.1.2., Eagleson, Vachaud (thèse), Bear (1972 et 1979);
- équations exactes du mouvement de la surface libre: voir § 6.3.d., Schneebeli, Bear (1972);
- écoulements polyphasiques de fluides non miscibles: voir § 9.1., cours production I.F.P. et Bear (1972, 1979);
- écoulements de fluides miscibles de densités différentes: voir § 9.2., Bear (1972, 1979).

Nous donnerons au Chap. 7 des solutions en régime permanent ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, la charge ne varie pas avec le temps) de l'équation de diffusivité, et au Chap. 8 des solutions en régime transitoire ($\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$, la charge varie avec le temps).

Chapitre 6

LES SYSTEMES AQUIFERES

- 6.1. *Types de nappes*
 - 6.1.1. *Nappes libres*
 - 6.1.2. *Nappes captives*
 - 6.1.3. *Milieux peu perméables*

- 6.1.4. *Types de nappes en fonction de la géologie*
- 6.2. *Réserves des nappes*
- 6.3. *Conditions aux limites et conditions initiales usuelles*

Nous allons examiner rapidement les principaux types de nappes que l'on peut rencontrer dans la pratique, les réserves que ces nappes contiennent, et enfin les conditions aux limites usuelles.

Mais d'abord, qu'est-ce qu'une nappe ? Margat et Castany, dans le Dictionnaire Français d'Hydrogéologie, définissent une nappe d'eau souterraine comme "l'ensemble des eaux comprises dans la zone saturée d'un aquifère, dont toutes les parties sont en liaison hydraulique".

Un aquifère est alors un "corps (couche, massif) de roches perméables comportant une zone saturée (ensemble du milieu solide et de l'eau contenue) suffisamment conducteur d'eau souterraine pour permettre l'écoulement significatif d'une nappe souterraine et le captage de quantités d'eau appréciables. Un aquifère peut comporter une zone non saturée".

Dans la pratique, une nappe est une abstraction: on isole par la pensée une "couche" d'eau limitée vers le haut et vers le bas, et éventuellement latéralement dans l'espace, couche qui imprègne un aquifère. Pensez à une "nappe de brouillard".

Cette notion de nappe isolée s'oppose à la notion de communication verticale entre nappes par drainance, dont nous parlerons plus loin, § 8.8.

6.1. TYPES DE NAPPES

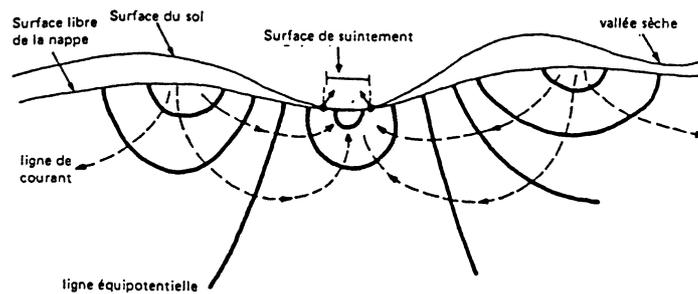
6.1.1. Nappes libres

Nous définirons rigoureusement le terme de nappe libre au § 6.1.2. par opposition aux nappes captives. Mais regardons d'abord des exemples de nappe libre.

a) *Nappe de vallée.*- Dans les climats tempérés, si l'on suppose le sol uniformément poreux et perméable, l'on sait (Chap.1) que l'eau de pluie s'infiltré et vient saturer la roche jusqu'à un certain niveau, appelé surface libre. On appelle nappe cette zone saturée, depuis la surface libre jusqu'à la base (par exemple, un substratum imperméable).

Dans la nappe, l'eau circule vers les exutoires qui sont les points bas de la topographie (sources, rivières du réseau hydrographique de surface).

Prenons pour exemple la nappe de la craie, dans le Nord de la France. L'aspect en coupe de la nappe est le suivant:



Nous avons représenté sur la coupe les lignes de courant de l'écoulement et les lignes d'égale charge, que l'on appelle *lignes équipotentielle*s de l'écoulement (ou encore courbes isopièzes, courbes piézométriques, ...).

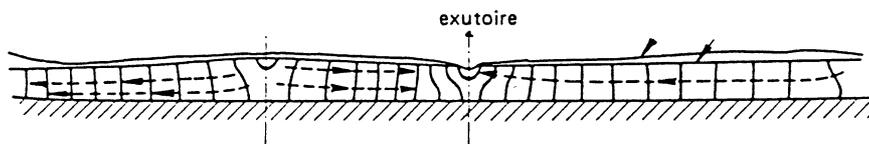
Si la perméabilité est isotrope, les lignes de courant sont orthogonales aux équipotentielles, d'après la loi de Darcy.

Les vallées les plus profondes drainent seules la nappe, les autres vallées sont dites *vallées sèches*.

L'exutoire n'est pas localisé: c'est toute une surface de la nappe qui affleure et où l'eau sourd. On l'appelle *surface de suintement*.

Dans le cas de la craie, il n'y a pas, à proprement parler, de substratum car la craie est par endroits très épaisse (plusieurs centaines de mètres), mais seule la partie supérieure (sur 10 à 30 mètres, par exemple) est fissurée, altérée et perméable, la craie saine en profondeur étant très peu perméable.

Le schéma précédent est en fait très distordu: l'échelle verticale est 100 fois plus forte que l'échelle horizontale. Si l'on redessine la même coupe avec la même échelle dans les deux directions, on obtient:



On constate que les équipotentielles sont en fait pratiquement verticales: on fait souvent l'hypothèse qu'en pratique, les vitesses d'écoulement des nappes sont presque parallèles à la surface libre, sauf au voisinage immédiat des exutoires et des lignes de crête.

Regardons maintenant une telle nappe de vallée en plan (cf. Pl.5). On l'appelle justement nappe de vallée parce que le drainage de la nappe se fait uniquement par les vallées. A plus grande échelle, on a donc une succession de petites entités drainées chacune par une rivière.

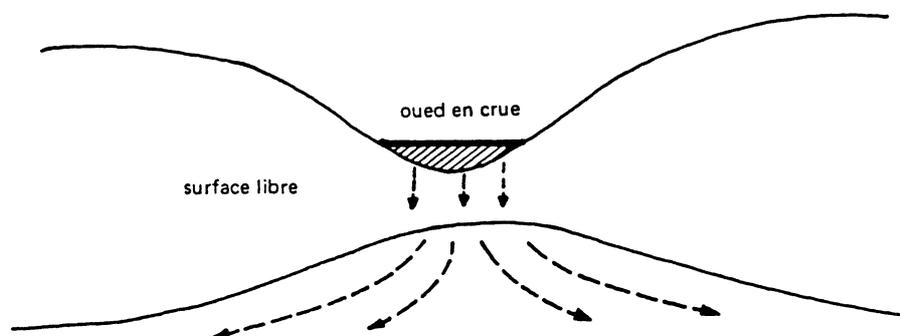
On trace en plan la carte piézométrique qui représente, en principe, les lignes d'intersection des surfaces équipotentielles avec la surface libre. Cependant, comme les équipotentielles sont en pratique proches de la verticale, la carte piézométrique donne la charge en tout point de la nappe.

La ligne de partage des eaux entre chaque vallée (en pointillé épais sur la Pl.5) est une ligne de courant particulière que l'on trace à partir d'un point quelconque de l'exutoire pour enfermer la part de nappe qui s'écoule dans le bassin ainsi délimité. Elle passe, bien sûr, par tous les points hauts de la nappe. On l'appelle généralement crête de la nappe. Elle est souvent assez proche de la ligne de partage des eaux de surface du bassin-versant topographique.

Au cours de l'année, la nappe fluctue de quelques mètres environ, car nous avons vu (Chap.1) qu'elle n'est alimentée par les pluies qu'en hiver: elle tarit en été, et remonte après les pluies d'automne. Si la nappe est profonde sous le sol (10 à 30 m), le temps de transfert de l'infiltration à travers le non saturé est relativement long et la nappe est en étiage entre Octobre et Novembre, et en hautes eaux en Avril-Mai, par exemple.

On appelle encore "nappe phréatique" ce type de nappe (du grec phreatos, puits) qui veut simplement dire que c'est la première nappe que l'on rencontre lorsque l'on creuse un puits, et qui est donc la plus facilement exploitée.

b) *Nappe de vallée en pays aride.*- Le schéma précédent est généralement inversé: l'infiltration de la pluie est faible et bien inférieure à l'évapotranspiration. Dans les vallées, les crues des oueds temporaires amènent beaucoup d'eau, qui peut s'infiltrer et alimenter la nappe: c'est leur source principale d'alimentation.



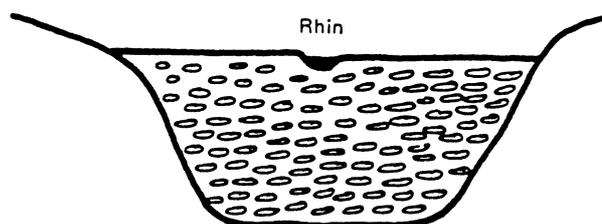
En plan, les oueds venus des montagnes peuvent s'écouler soit vers des zones d'épandage où la crue se perd, s'infiltrer et s'évapore par la suite, soit vers des dépressions formant des lacs temporaires où l'eau s'accumule puis s'évapore, laissant des croûtes salées en surface. On appelle ces zones des chotts ou sebkhas. Les nappes phréatiques, dans les deux cas, s'écoulent généralement vers les mêmes points, où les eaux se perdent et s'évaporent.

En pays tropical, on peut parfois observer une alternance des deux schémas d'alimentation, par la surface ou par la rivière, entre la saison sèche et la saison humide.

En pays très froids, où le sol est et reste gelé en profondeur, l'écoulement est limité à la partie supérieure, entraînant des possibilités de solifluxion.

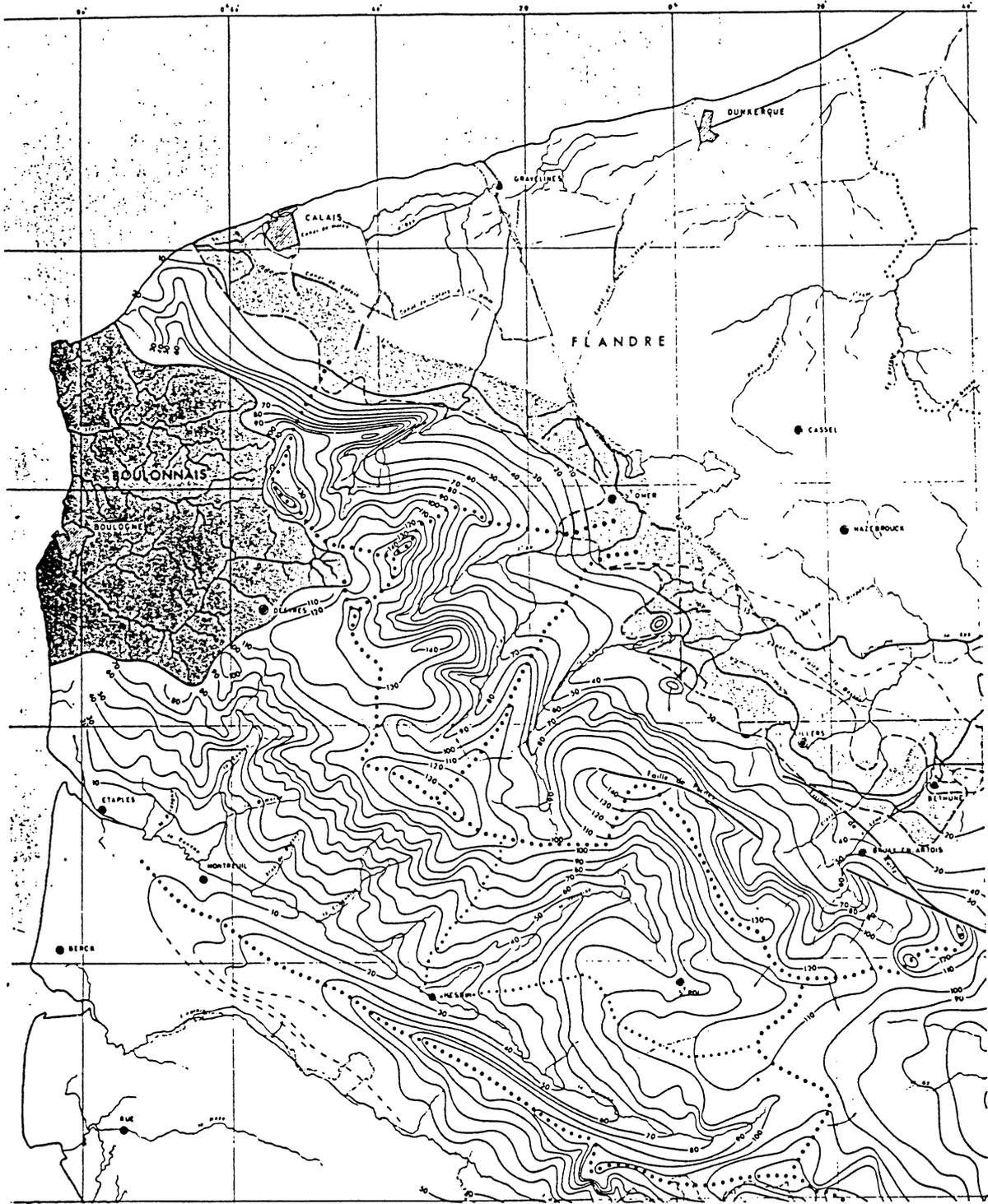
c) *Nappe fluviale.*- C'est la nappe libre sise dans les alluvions qui jalonnent le cours d'un fleuve. L'eau de la nappe est généralement en équilibre avec celle du fleuve, étant tantôt drainée par le fleuve, tantôt alimentée par lui.

Ainsi, en est-il par exemple de la plaine du Rhin, qui est un fossé d'effondrement comblé par des alluvions récentes:



La puissance du comblement alluvial est par endroits de l'ordre de 100 m, avec des matériaux grossiers (sables, graviers, galets) très perméables. Ces matériaux sont saturés d'eau presque jusqu'à la surface du sol, et constituent une des nappes les plus importantes de France.

Pratiquement, tout cours d'eau a déposé des alluvions le long de son lit, et est donc en liaison avec une nappe alluviale. Celle-ci peut être plus ou moins large par endroits, par exemple:

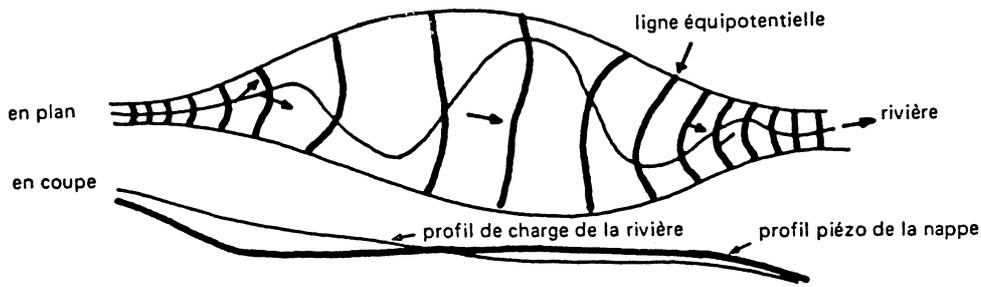


LÉGENDE

ECHELLE : 1/200 000
0 2 4 6 8 10

- 10 — Courbe isopiézométrique (l'équidistance est de 10 mètres)
- - - 35 - - - Courbe isopiézométrique intercalaire
- - - - - Courbe isopiézométrique hypothétique
- Limites des bassins souterrains principaux
- Limites des bassins souterrains secondaires
- — — — — Limite de la zone ou la nappe de la craie est captive sous les terrains tertiaires (sur la carte ne figurent pas les zones où la nappe est légèrement captive sous les alluvions de fond de vallée)
- ○ ○ Régions sans nappe de la craie
- ○ ○ Limites du bassin houiller

Pl.5 - Carte piézométrique de la nappe de la craie dans la région du Nord.
(Extrait, document BRGM, 1965)



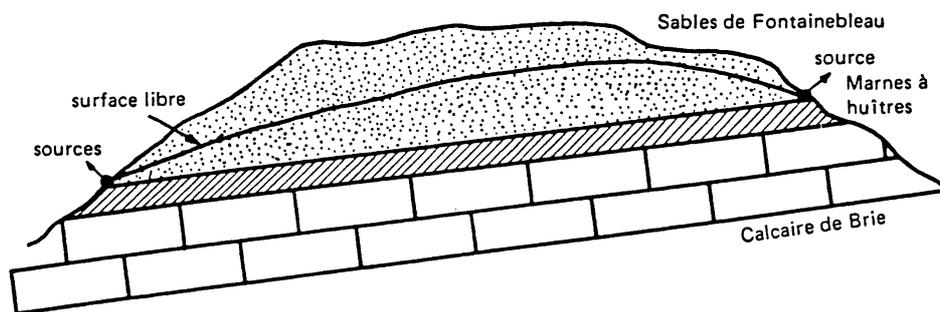
A l'entrée de la plaine alluviale, le niveau de l'eau dans le fleuve est supérieur à celui de la nappe: le fleuve alimentant la nappe, les lignes équipotentielle sont serrées (écoulement rapide, divergent). Au centre de la plaine, l'écoulement est plus lent: rivière et nappe sont en équilibre. A l'aval, l'inverse se produit, le rétrécissement de la plaine entraîne un drainage des eaux vers la rivière; c'est souvent une zone marécageuse, la surface de la nappe est très proche de la surface du sol et supérieure à celle du fleuve.

On désigne parfois ces nappes par "nappe sous-fluviale" et leur débit comme le "sous-écoulement" du fleuve (underflow en anglais, terme utilisé souvent en Afrique du Nord, ou encore inféro-flux).

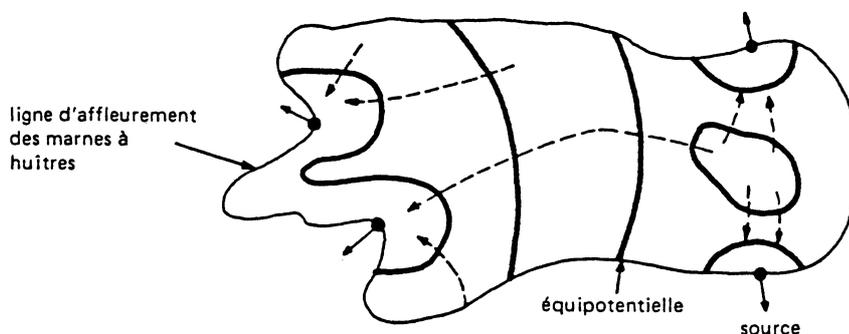
Ce type de nappe est encore dit "soutenu" car il est en liaison avec un plan d'eau (rivière ou lac).

Il peut arriver enfin que le lit de la rivière soit colmaté par des éléments fins interrompant cette liaison. C'est surtout le cas des fleuves dont les débits sont régularisés par des barrages, et où l'absence de crues violentes empêche un décapage et une remise en mouvement des sédiments fins déposés.

d) *Nappe non soutenue et nappe perchée.*- C'est une nappe limitée vers le bas par un imperméable et qui n'est pas en liaison avec un cours d'eau venant "soutenir" son alimentation. C'est le cas, par exemple, de la nappe libre des sables de Fontainebleau, reposant, dans le nord de la région parisienne, sur le banc imperméable des marnes à huîtres (ce niveau manque au sud-est de Melun, et à Fontainebleau en particulier).



De part et d'autre du massif se trouvent des lignes de sources. En plan on obtient, par exemple:



Les sources importantes se situent dans les vallées, les points les plus bas de la topographie du toit des

marnes à huîtres.

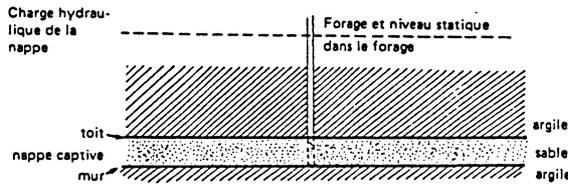
Si, sous le banc imperméable (ou peu perméable), soit ici les marnes à huîtres, existe une nouvelle nappe libre, par exemple dans le calcaire de Brie, la nappe supérieure est dite "nappe perchée".

La nappe sous-jacente est en fait alimentée verticalement par des "fuites" de la nappe perchée à travers son substratum (les marnes à huîtres) peu perméable. On appelle ce phénomène de "fuite" la "drainance" et nous l'étudierons ultérieurement (§ 8.3).

6.1.2. Nappes captives

Ce terme s'oppose à celui de "nappe libre", que nous n'avons pas encore défini.

Une nappe est dite captive si elle est surmontée par une formation peu (ou pas) perméable, et si la charge hydraulique de l'eau qu'elle contient est supérieure à la cote du toit de la nappe:



Quand on fore un puits ou un piézomètre dans une telle nappe, l'eau remonte brusquement dans l'ouvrage lorsque l'on crève le toit imperméable de la nappe.

L'eau contenue dans la nappe est en fait comprimée à une pression supérieure à la pression atmosphérique. On dit également que la nappe est "confinée" (nappe captive se dit "confined aquifer" en anglais, nappe libre se dit "water table aquifer").

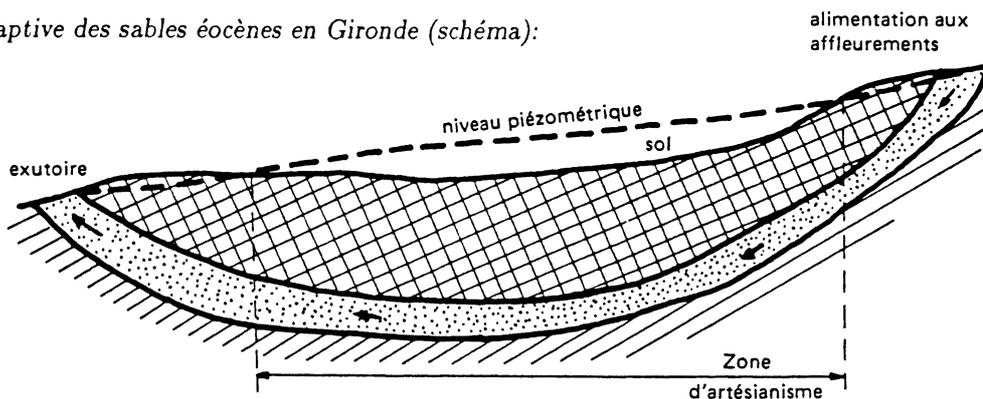
Si cette pression est suffisante pour que l'eau remonte jusqu'à la surface du sol et jaillisse (soit charge piézométrique supérieure à la cote du sol), la nappe captive est dite "artésienne" et le forage "artésien" ou "jaillissant".

Cet artésianisme peut cependant disparaître avec le temps si on exploite la nappe, par réduction de la charge dans l'aquifère.

Par opposition à une nappe captive, une nappe libre est une nappe où la surface piézométrique coïncide avec la surface libre de la nappe, et qui est surmontée par une zone non saturée.

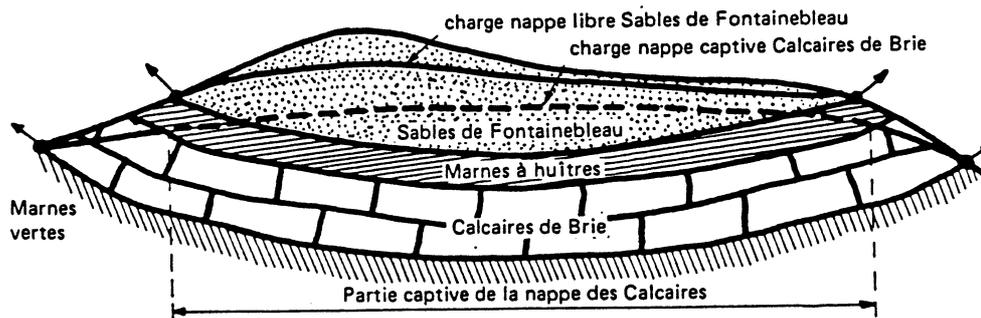
Exemples:

Nappe captive des sables éocènes en Gironde (schéma):



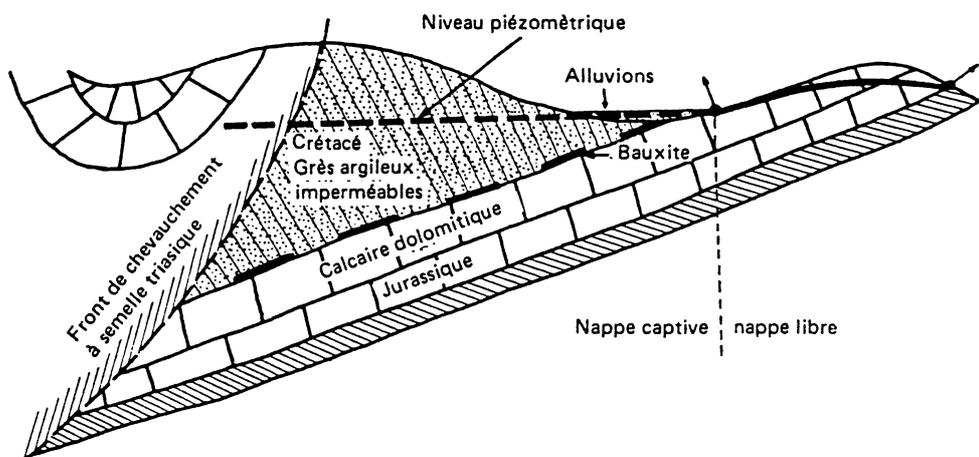
Nappes superposées:

Dans l'exemple des sables de Fontainebleau sur les calcaires de Brie, la nappe de ces derniers peut souvent être captive par endroits.



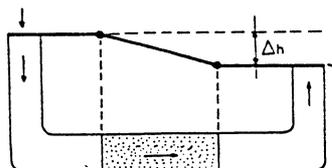
Nappe libre devenant captive:

Voici, par exemple, la coupe schématique de la nappe des dolomies jurassiques près de Brignoles (Var), qui constitue le mur des exploitations de bauxite de la région, et pose de sérieux problèmes d'exhaure:



Analogie entre une nappe captive et un perméamètre en U:

Il faut penser, dans une nappe captive, à un perméamètre en U, dont voici la ligne de charge:



Importance de la captivité sur le dénoyage:

Il faudra toujours se rappeler que quand on rabat une nappe (c'est-à-dire que l'on fait diminuer sa charge par des prélèvements):

- on diminue l'épaisseur mouillée de la nappe pour une nappe libre, d'où réduction de la transmissivité (perméabilité × épaisseur mouillée) et de la section offerte à l'écoulement;
- on ne diminuera rien de tel sur une nappe captive; la section offerte à l'écoulement reste la même et la transmissivité aussi, tant que le rabattement n'entraîne pas la surface piézométrique plus bas que le toit de la nappe (auquel cas la nappe devient libre).

6.1.3. Milieux peu perméables

Ces milieux ne forment pas, à proprement parler, des aquifères car on ne peut les exploiter pour en extraire de l'eau. Cependant, en règle générale, ils contiennent une nappe qui peut être libre si la couche

considérée affleure, ou captive si elle est profonde. En terrain peu ou très peu perméable, il ne faut jamais dire "il n'y a pas de nappe", mais se souvenir que le milieu est vraisemblablement saturé d'eau, eau qui ne s'écoule que très lentement ou pas du tout, vu la très faible perméabilité du milieu.

L'ouverture de travaux miniers, amenant une circulation d'air qui dessèche le milieu, peut faire disparaître toute trace d'écoulement. C'est ainsi que, par exemple, les mines de sel souvent qualifiées de totalement sèches, peuvent dans certains cas être considérées comme un milieu saturé en eau, le flux d'eau qui y transite étant si faible qu'il s'évapore au contact des galeries.

Ces milieux jouent un très grand rôle dans de nombreux problèmes où l'eau qu'ils contiennent intervient.

Génie Civil: Consolidation, tassement,
poussées d'écoulement et stabilité.

Hydrogéologie: Alimentation des nappes profondes à travers les semi-perméables par "drainance" (écoulements verticaux), voir plus loin, § 8.3.

On distingue généralement:

- les aquitards, ou semi-perméables, qui sont des horizons de faible perméabilité dans lesquels l'eau ne peut pas être prélevée de façon efficace par des puits, mais où un écoulement non négligeable peut se produire, amenant de l'eau par drainance aux aquifères adjacents;
- les aquicludes, ou imperméables, qui ont une perméabilité *très faible* si bien qu'aucun débit de drainance significatif ne peut y prendre naissance à petite échelle (par exemple au cours d'un essai de débit), mais qui, cependant, ne sont pas négligeables sur une très grande surface.

6.1.4. Types de nappes en fonction de la géologie

a) *Régions de socles* (soit 1/3 de la France: Massif Central, Vendée, Bretagne, Vosges, Ardennes, Maures, Estérel, Corse, ...), majeure partie du bouclier africain.

Les roches sont cristallines, métamorphiques ou schisteuses. Elles sont très peu perméables.

On rencontre de petites nappes locales dans les zones d'altération (arènes) ou dans les dépôts alluviaux, ou encore dans les zones fissurées.

Les ressources en eau souterraine sont faibles, entraînant un habitat dispersé. Il faut faire appel aux eaux de surface pour avoir des débits importants. Mais en étiage sévère, celles-ci peuvent se tarir: voir les problèmes de la sécheresse en Bretagne pendant l'été 1976. Par de nombreux forages au marteau fond de trou, on a pu mettre en exploitation, depuis 1976, de nombreux puits dans des régions granitiques, en Bretagne, donnant de quelques m³/h à quelques dizaines de m³/h. Par exploitation de photos aériennes, on recherche les intersections de zones de fracturation. En revanche, dans le Massif Central, une telle prospection a donné de moins bons résultats: tout est fonction de la fracturation.

b) *Régions montagneuses de terrains sédimentaires plissés*:

Les nappes sont rares et fragmentaires, dues au morcellement des réservoirs. Leur étude se fait cas par cas.

c) *Régions de plateaux sédimentaires calcaires*:

C'est le domaine du karst: écoulement dans des fissures élargies, formant de véritables rivières souterraines. Les circulations sont plus proches d'un système de drainage par chevelu de rivières, mais souterraines. Les eaux de surface communiquent d'ailleurs avec les eaux souterraines par de nombreux systèmes de pertes et de résurgences. Il peut cependant exister tout un réseau de fissures, plus ou moins élargies, jouant le rôle de réservoir ou de nappe dans le karst, en liaison avec le système de drainage par chenal, s'il existe. Les deux conceptions ("rivière souterraine", "eau de fonds") se sont souvent opposées dans le passé, alors qu'elles se complètent. Ce réservoir d'eau de fond se situe en général en-dessous de la cote des exutoires.

L'étude des régions karstiques est une branche très particulière de l'hydrogéologie. Voir en particulier les travaux de l'Université de Montpellier (Pr. Avias, Drogue) et du CNRS à Moulis (Mangin, Bakalowicz).

Citons les plateaux du Jura, les Grands Causses, le plateau de Vaucluse avec la résurgence de la Fontaine de Vaucluse, l'une des sources karstiques les plus importantes du monde. De tels systèmes se retrouvent sur le pourtour de la Méditerranée (Grèce, Turquie, Libye), en Floride, etc...

d) Bassins sédimentaires:

Ce sont, en France, les bassins Parisien (150.000 km²) et Aquitain (50.000 km²). Ces bassins sont constitués d'alternances de roches perméables et peu perméables. C'est là que se trouvent les nappes les plus importantes et les plus étudiées. On rencontre d'abord une nappe libre, puis une succession de nappes captives (jusqu'à 7 et plus en Aquitaine) séparées par des semi-perméables. En Afrique du Nord (Sahara, Libye), le bassin sédimentaire du Continental renferme de nombreuses nappes.

e) Plaines alluviales:

Elles sont présentes le long de presque tous les cours d'eau. En étudiant la géologie des versants, on peut reconnaître les zones les mieux alimentées par les nappes éventuelles latérales. Par géophysique (électrique ou parfois sismique), on peut rechercher les zones les plus épaisses, et les plus perméables (les moins conductrices).

Ces nappes alluviales sont très exploitées et souvent en danger d'être contaminées par les pollutions, soit accidentelles, soit venues du fleuve qu'elles côtoient.

f) Bilan grossier:

On estima que le débit de l'ensemble des nappes de France est de 280 millions de m³/j environ, soit 1/4 à 1/5 des précipitations. Ce débit correspond à 60% du débit moyen annuel des cours d'eau.

L'exploitation actuelle des nappes est environ:

Nappes captives:	2,7 millions de m ³ /j
Grandes nappes libres:	4,4 millions de m ³ /j
Nappes alluviales:	6,0 millions de m ³ /j

g) Bibliographie hydrogéologique en France:

Pour la France, il existe un assez grand nombre de cartes et documents publiés, qui permettent de se renseigner sur l'hydrogéologie d'une région. Au premier chef, il faut consulter la carte géologique au 1/50.000 ou au 1/80.000, qui décrit les formations, et possède le plus souvent un paragraphe "hydrogéologie" dans sa notice. La liste des documents suivants est publiée par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM, BP 6009, 45060 Orléans Cédex) où l'on peut également les acquérir.

- Cartes et atlas hydrogéologiques:

- Carte hydrogéologique de l'Europe (coédition UNESCO-BGR).
Cinq feuilles publiées sur un total de 30 prévues. Disponibilité et limite figurent sur le catalogue des cartes et éditions de l'UNESCO, obtenu sur demande adressée aux Editions du BRGM.
- Carte hydrogéologique de la France au 1/1.500.000, systèmes aquifères.
Une feuille au format 92×87 cm, disponible pliée ou à plat, accompagnée d'une notice d'une vingtaine de pages (1980).
Conçue selon une légende originale, cette carte délimite les principaux aquifères, classés selon le régime et le débit d'écoulement des eaux souterraines, leur comportement vis-à-vis de l'exploitation et leur relation avec les eaux de surface. Des indications quantifiées sur l'alimentation des nappes et sur le débit d'étiage des cours d'eau sont données.

- La notice explicative précise les principes et méthodes de cartographie et expose la traduction pratique des conditions représentées pour la gestion des eaux souterraines. Elle fournit des informations régionales et générales sur les ressources en eau souterraine de la France.
Cette carte s'adresse aux hydrogéologues, aux ingénieurs et aux spécialistes de l'évaluation de la gestion des ressources en eau, aussi bien qu'aux chercheurs et aux enseignants.
- Carte de la qualité chimique des eaux souterraines de la France à 1/1.000.000, par A. Landreau et B. Lemoine, avec notice (1978).
L'objet de cette carte est de représenter la qualité chimique des eaux souterraines brutes en appréciant l'aptitude de l'eau à satisfaire à différents usages (industriels, agricoles, alimentaires).
- Carte du débit moyen des nappes d'eau souterraine de la France, à 1/1.000.000, par O. Bouillin (1970).
- Carte des eaux minérales et thermales de la France, à 1/1.000.000, par J.J. Risler (1975).
Cette carte replace les sources thermales et minérales dans leur cadre géologique. Plus de 500 sources, dont une moitié sont autorisées par la réglementation, y figurent. A l'aide de signes conventionnels, on a pu représenter leur chimisme (anions, cations), leur régime thermique et le type d'exploitation économique dont elles font l'objet.
- Atlas des eaux souterraines de la France, couvrant les 21 régions. *Un vol., 360 p., 152 cartes et coupes dont 104 coul. (1970) et son complément bibliographique 92 p. (1972).*
- Atlas des nappes aquifères du district de la région parisienne. *Un atlas (90×50 cm), 60 cartes, un index analytique et une notice explicative de 160 p. (1970).*
- Carte hydrogéologique du Bassin de Paris (1968), à l'échelle du 1/500.000. Deux feuilles indivisibles.
- Carte hydrogéologique, à 1/200.000 des Bouches-du-Rhône (publiée par l'Agence de Bassin) (1975).
- Carte hydrogéologique de la région Rhin-Meuse (publiée par l'Agence de Bassin) (1975).
- Carte hydrogéologique à 1/100.000 de la région Champagne-Ardenne (en trois feuillets):
Reims, Mourmelon, Avize, Suippes
Rethel, Asfeld, Château-Porcien, Attigny
Vertus, Chalons, Vitry-le-François, Fère-Champenoise.
- Carte à 1/80.000 de la région karstique nord-montpelliéraine, par H. Paloc, avec notice de 229 p. *Mém. BRGM, n° 50 (1967).*
- Carte des "eaux souterraines" à 1/50.000.
Feuille disponible: Douai (1966).
- Carte hydrogéologique à 1/50.000.
Feuilles disponibles:

Amiens	Altkirch
Creil	Laon
Douai	Evreux
La Crau (Istres-Eyguières)	Hallencourt
Région grenobloise	Beauvais
Valenciennes	Grenade-sur-Garonne (1976)
Paris	Toulouse-Ouest (1976)
Auxerre	Bassin du Caramy et de l'Issole (Var) (1971)
Toulon (1975)	Nord-Est Varois
Sète	Esquisse du synclinal de Val Vins (Var)
- Carte hydrogéologique des calcaires ferrifères du bassin lorrain à 1/50.000 (éd. Samifer).
Feuilles disponibles:
Longwy-Audun-le-Roman (1976)
Briey (1977)
Chambley-Bussièrès (1979)
Nancy (1980).
- Carte hydrogéologique du Bassin de l'Authion, en deux feuilles avec notice (1970).
- Carte hydro-lithologique du Bassin de l'Adour, à 1/250.000, en deux feuilles éditées par l'Agence Financière de Bassin Adour-Garonne (1976).

Feuilles disponibles:

Beaune (éd. SDAU) (1977)	Pontarlier (1979)	Besançon (1980)
Belleville (1979)	Ruffec (1980)	Grenoble (1980)
Chagny (éd. SDAU) (1977)	Serrières (1978)	Montluel (1980)
Cognac (1980)	Tournon (1979)	Saint-Claude (1981)
Chalon-sur-Saône (1978)	Valence (1979)	Vif (1980)
Dole (1978)	Vienne (1978)	
Givors (1976)	Villefranche (1979)	
Lyon (1976)		

- Carte de vulnérabilité à la pollution de la nappe alluviale du Var inférieur à 1/20.000 (1974).

Atlas de géothermie:

- 0201 La Géothermie en France - BRGM - Energies Nouvelles (2^{ème} édition). *Brochure de 72 pages, nbx fig. et schémas (1978).*
Brochure de vulgarisation indiquant d'une part les ressources de la France métropolitaine et, d'autre part, l'exploitation et l'utilisation possibles de ces ressources.
- 0202 Synthèse géothermique du fossé rhénan (Geothermische Synthese des Oberrheingrabens. Coédition BRGM-Geologisches Landesamt Baden-Wurtemberg). *Environ 100 p., 23 dépliant hors texte de cartes et de coupes.* (A paraître courant 1980).
- 0203 Atlas du potentiel géothermique du bassin Aquitain. BRGM et SNEA(P) 167 p., 38 pl. hors texte (1978). B. Housse, Ph. Maget.
Réalisé par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières et par le groupe SNEA(P), cet ouvrage présente les formations aquifères profondes du bassin Aquitain qui peuvent constituer des objectifs économiques en géothermie de "basse énergie". Il doit aider à promouvoir cette nouvelle source d'énergie en présentant aux autorités régionales, ainsi qu'à tout utilisateur éventuel, une image claire des centres d'intérêt.
- 0204 Atlas du potentiel géothermique du bassin de Paris. BRGM-Elf Aquitaine. 125 p., 29 pl. hors texte (1976). B. Housse, Ph. Maget.
- 0205 Utilisation des nappes d'eau souterraine comme source froide des pompes à chaleur, région Rhône-Alpes. 1 carte à 1/250.000, deux brochures, 1980.

- MEMOIRES ET DOCUMENTS DIVERS -**Colloques et congrès:**

- Colloque national "Les eaux souterraines et l'approvisionnement en eau de la France", Nice, 27-28 Octobre 1977. *trois volumes, 697 p., nombreux tableaux et figures (1977). 51 communications.* Les eaux souterraines sont-elles assez bien utilisées en France ?
Après la sécheresse de 1976, il a paru nécessaire d'organiser une large discussion entre techniciens et responsables sur les différents aspects de ce sujet:
 - . thème 1: Ressources en eau souterraine de la France,
 - . thème 2: Utilisation des eaux souterraines en France,
 - . thème 3: Techniques de l'exploitation des eaux souterraines,
 - . thème 4: Economie de l'exploitation et des utilisations des eaux souterraines,
 - . thème 5: Conservation et gestion des ressources et réglementation des exploitations.
- Rapports généraux du colloque national "Les eaux souterraines et l'alimentation en eau de la France". Nice, Octobre 1977, Bull. BRGM, sect. III, n°4-1979.

Mémoires du BRGM:

- n°7. P. Elouard - Etude géologique et hydrogéologique du Guebla mauritanien et de la vallée du Sénégal. *un vol., 252 p., 31 fig., 28 pl. h.t., 8 pl. photo h.t. (1962).*
- n°13. M. Deffossez - Contribution à l'étude géologique et hydrogéologique de la boucle du Niger. *un vol., 174 p., 22 fig., 7 pl., 15 dpl. h.t., 2 cartes couleurs dpl. h.t. (1963).*
- n°19. R. Degallier - Hydrogéologie du Ferlo septentrional (Sénégal). *un vol., 44 p., 29 dpl. h.t., 1 carte couleurs dpl. h.t. (1962).*
- n°20. G. Guérin-Villeaubreil - Hydrogéologie en Côte d'Ivoire. *un vol., 43 p., 80 dpl. h.t. (1962).*

- n°25. Cl. Mégnier - Observations hydrogéologiques sur le sud-est du bassin parisien. Les circulations aquifères dans le Jurassique et le Crétacé de l'Yonne. *un vol., 287 p., 77 fig. (1964).*
- n°41. M. Audibert - Etude hydrogéologique de la nappe profonde du Sénégal "Nappe maestrichtienne". *un vol., 115 p., 48 fig., 5 pl., dpl. h.t. (1966).*
- n°49. J. Depagne - Etude hydrogéologique de la région d'Idini, en vue de l'alimentation en eau de Nouakchott (République Islamique de Mauritanie). *un vol., 79 p., 20 fig., 6 tab. (1967).*
- n°50. H. Paloc - Carte hydrogéologique de la France: région karstique nord-montpelliéraine. Notice explicative. *un vol., 229 p., 17 fig., 9 pl. fotogr., 1 carte couleurs dpl. h.t. (1967).*
- n°76. Congrès national d'Hydrogéologie (Journées Schœller). Bordeaux, Mars-Avril 1969, 898 p. (1969).
- n°93. Bibliographie Hydrogéologique de la France (1968-1977). *un vol., 97 p. (1977).*
- n°98. Cl. Mégnier - Hydrogéologie du centre du bassin de Paris. 608 p., nbs fig. (parution Janvier 1980).
L'hydrogéologie du centre du bassin de Paris est abordée sous le double aspect de la prospection et de l'étude générale des nappes aquifères. Les difficultés rencontrées lors de la prospection et les méthodes employées pour les résoudre sont décrites. L'étude des aquifères multicouches et des relations nappe-eaux de surface a été particulièrement poussée. Les étapes de la minéralisation des eaux et la stratification hydrochimique à l'intérieur des aquifères ont été étudiées en vue de connaître le renouvellement de l'eau souterraine et de prévoir le cheminement d'éventuelles pollutions.
L'étude a porté également sur les principaux champs captants, les zones surexploitées, les régions particulièrement menacées par des pollutions. Un bilan nappe par nappe permet d'estimer les ressources encore exploitables en fonction de la qualité souhaitée et des zones restant à explorer.
Un ouvrage indispensable à tout hydrogéologue amené à travailler dans le centre du bassin de Paris.

Documents du BRGM:

- n°1. Hydrogéologie de la craie du bassin de Paris. Colloque régional, Rouen, 25-26 Mai 1978. Communications. *un volume, 627 p. (1978).*
Un milliard de m³ d'eau, en général de qualité, sont prélevés chaque année dans la craie qui couvre 25% des bassins sédimentaires français. Le présent colloque a été une confrontation entre les différentes équipes qui étudient ce réservoir depuis une vingtaine d'années.
Quatre thèmes sont étudiés:
- Réservoirs et ressources,
- Qualité chimique des eaux souterraines et pollution,
- Technique de prospection et d'exploitation,
- Utilisation des eaux souterraines.
Le texte intégral des communications est donné.
- n°3. Hydrogéologie de la craie du bassin de Paris. Colloque régional, Rouen, 25-26 Mai 1978. Rapports généraux, débats, conclusions, 15 p.
- n°9. J.J. Collin - Les eaux souterraines de la plaine Saône-Doubs. 318 p., env. 110 fig., nbr tabl. (1979).
Le travail débute par une révision des formations Plio-Quaternaire qui constituent les aquifères. Il se poursuit par l'analyse du fonctionnement hydraulique du système, très marqué par le passé récent des mises en place des cours d'eau et par les aménagements anthropiques. Un grand complexe chimique exploite ces nappes, mais aussi les pollue. De ce fait, toutes les techniques de simulation et de prévisions sont-elles appliquées en vue de la sauvegarde de la ressource. Parallèlement au développement de la monographie est conduite une réflexion méthodologique (adéquation des techniques à la résolution des problèmes posés au praticien).
- n°11. J. Person - Interventions réglementaires du géologue agréé en vue de la protection des eaux destinées à l'alimentation humaine. 193 p. (1979).
Le colloque sur la protection des eaux destinées à l'alimentation humaine (Orléans, Mars 1977) a mis en évidence la nécessité de préciser les interventions du géologue agréé en matière d'eau et d'hygiène publique. Une instance de réflexions s'est réunie à deux reprises au cours de l'année 1978 et elle a élaboré des recommandations pour l'accomplissement de ces missions.
Les données de base ainsi rassemblées apportent une orientation nouvelle à la conception et à l'établissement des périmètres de protection. Elles sont complétées par les extraits des textes législatifs, ainsi que par une analyse de la réglementation.

- n° 15. A. Desplan - Les réactions géochimiques lors de l'exploitation d'un doublet géothermique. 152 p., 26 fig., 6 pl. photos (1979).
Ce travail qui concerne l'influence de la géothermie sur les interactions eau-roche s'articule en deux parties:
- aspect théorique des réactions chimiques en cause;
 - aspect expérimental. D'une part, l'existence des réactions est vérifiée, et on a observé leurs conséquences sur des échantillons du réservoir. D'autre part, on a établi les rapports des réactions avec le déplacement du fluide par l'intermédiaire de la cinétique.
- n° 17. F. Parascandola - Cartographie de la vulnérabilité des eaux souterraines à la pollution. Effets d'échelle. env. 80 p., 5 pl. cartogr. couleurs (à paraître en Avril 1980).
Ce document précise, en vue d'une représentation cartographique, la notion de vulnérabilité des eaux souterraines à la pollution. Il présente et analyse en détail, grâce à de nombreux exemples, la méthodologie cartographique à l'échelle de 1/25.000 et 1/50.000 ainsi que les différentes utilisations des cartes dans le cadre d'une meilleure protection et d'une gestion optimale des ressources en eaux souterraines.

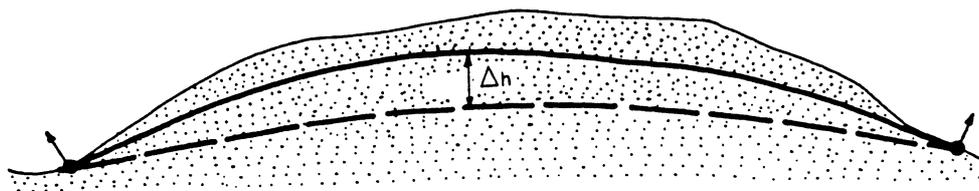
Mémoires du CERGA (Montpellier):

- T.I - J. Avias et al. - Documents sur l'hydrogéologie en territoire périméditerranéen. 127 p., 13 cartes, 15 pl. (1964).
- T.III.IV - P.J. Combes - Recherches sur la genèse des bauxites dans le nord-est de l'Espagne, le Languedoc et l'Ariège. 375 p., 72 fig., 28 tabl., 16 pl. phot., 1 carte géol. (1969).
- T.V - Documents sur l'hydropollution, l'hydrologie mathématique, l'information appliquée à l'hydrochimie, l'action des eaux sur les roches. 108 p., 21 fig., 2 pl. phot., 10 tabl. (1971).
- T.VI fasc. 1. - J. Avias - Réflexions sur le rôle de l'hydrogéologie et de la paléohydrogéologie dans la genèse, le remaniement et la destruction des gîtes minéraux en général et des gîtes métallifères stratiformes en particulier. 16 p., 2 pl. (1971).
- T. IX fasc. 2 et 3 - Contribution à l'étude de l'aquifère karstique de la source du Lez (Hérault). 240 p., 72 pl., 2 cartes, 12 pl. photo (1975).
- T.X fasc. 1 et 2 - C. Bezes - Contribution à la modélisation des systèmes aquifères karstiques. Etablissement du modèle BEMER, son application à quatre systèmes karstiques du Midi de la France. 137 p., 43 pl., 7 cartes (1976).
- T.X fasc. 3 - J.L. Lacas - Introduction à la méthodologie d'étude et d'utilisation des champs hydrothermiques des aquifères karstiques, d'après l'exemple du site de l'exsurgence de la source du Lez (Hérault). 68 p., 26 pl., 1 pl. photo, 1 carte (1976).
- T.X fasc. 4 - L. Rouquet - Contribution à l'étude hydrogéologique de la région médiane des Grands Causses - Gorges du Tarn et de la Jonte - Causse Méjean - Causse de Masegros. 102 p., 31 pl. et cartes (1976).
- T. XI - H. Erre - Contribution à l'étude de l'hydrogéologie des Corbières orientales karstiques et pseudokarstiques et des émergences littorales des côtes calcaires du Languedoc-Roussillon (Aude, Pyrénées Orientales). 213 p., 2 annexes, 82 fig. (1977).
- T. XII - P. Cabrol - Contribution à l'étude du concrétionnement carbonaté des grottes du sud de la France. Morphologie, genèse, diagenèse. 150 p., 20 pl. photos noir et blanc, 42 pl. dessin, 2 pl. couleurs (1978).
- n° 13 M. et P. Ambert et al. - Le Causse de Blandas et les Gorges de la Vis. Etude géomorphologique. 100 p. environ, 18 pl. de fig., 4 pl. photos noir et blanc, 1 carte h.t. à 1/25.000 (1978).
- n° 14 G. Fabre - Signes spéléologiques conventionnels synthétisés (Union Internationale de Spéléologie, Commission de Cartographie et de Topographie). 30 p. et pl. environ (1978).
- n° 19 - Actes du Symposium international sur les implications de l'hydrogéologie dans les autres sciences de la terre (1978).

6.2. RESERVES DES NAPPES

a) Nappes libres

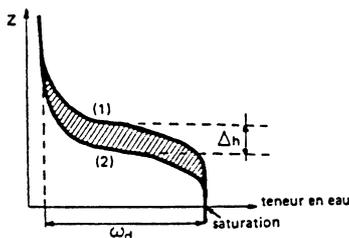
Si l'on rabat d'une hauteur Δh la surface libre (ou la charge piézométrique) d'une nappe libre:



le volume d'eau dégagé est bien évidemment le produit du volume balayé par la surface libre par la porosité de drainage ω_d de la nappe.

Ce volume n'est cependant pas immédiatement disponible: il faut laisser au profil d'humidité de la zone non saturée le temps de descendre de la hauteur Δh :

$\omega_d =$ porosité de drainage



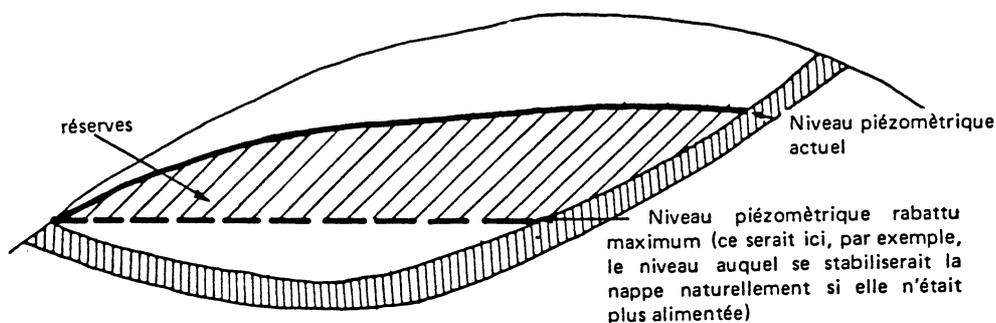
Si le profil final est une translation du profil initial, le volume libéré est bien $\omega_d \Delta h$ par unité de surface.

Le temps mis au profil pour se déplacer est fonction de la finesse du milieu poreux: voir, par exemple, le tableau des expériences de King, § 2.3.c.

La réserve d'une nappe libre est donc donnée par la différence:

- du niveau piézométrique actuel,
- avec le niveau piézométrique auquel on accepte de rabattre la nappe,

multipliée ensuite par surface et porosité. Par exemple:

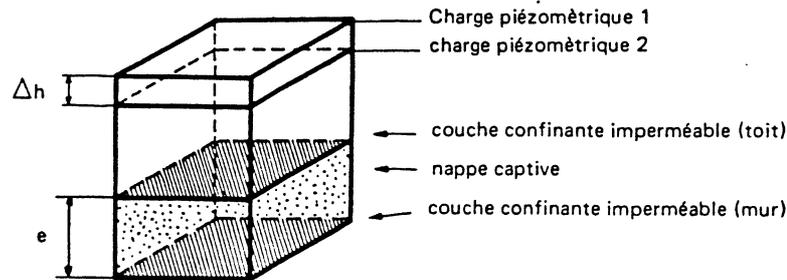


On pourrait cependant fixer un autre niveau piézométrique rabattu maximum (par exemple par la profondeur des puits que l'on accepte de forer...).

Les réserves d'une nappe libre sont donc aisées à définir.

b) Nappes captives

Imaginons un volume élémentaire de nappe captive dont nous allons baisser la charge hydraulique:



La variation de charge Δh n'entraîne aucun dénoyage de la nappe captive. Cependant, nous avons vu au Chap. 5, en établissant l'équation de diffusivité pour une nappe captive, que cette diminution de charge va entraîner une "production" d'eau sous l'influence de deux phénomènes (voir § 5.3.):

- décompression de l'eau: terme $\omega\beta_l$ (coefficient de compressibilité de l'eau: ω = porosité totale);
- tassement du milieu poreux: terme $\alpha - \omega\beta_s$ (coefficient de compressibilité de la matrice poreuse, moins ω fois le coefficient de compressibilité des grains solides).

L'ensemble de ces deux effets est combiné dans la définition du "coefficient d'emmagasinement":

$$S = \rho\omega g e (\beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega})$$

e = épaisseur de la nappe,
 S est sans dimension.

Par définition, par unité de surface (dans le plan horizontal) de nappe captive, le volume d'eau libéré par la variation de charge Δh est:

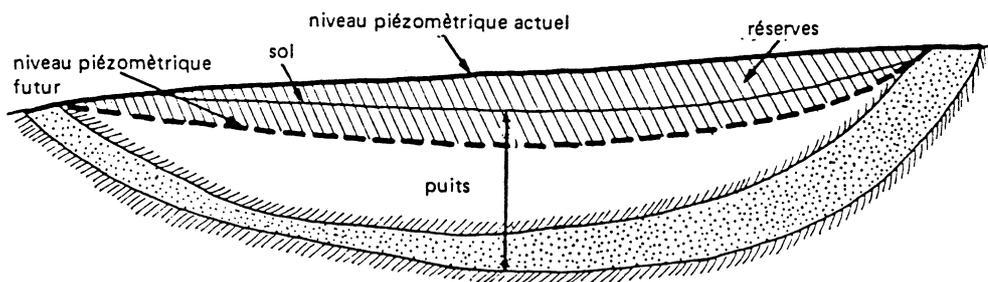
$$V = S\Delta h$$

Autrement dit, le coefficient d'emmagasinement S joue, pour une nappe captive, le même rôle que la porosité de drainage ω_d pour une nappe libre.

La réserve d'une nappe sera le produit du coefficient d'emmagasinement S par la surface (en plan) de la nappe et par la différence:

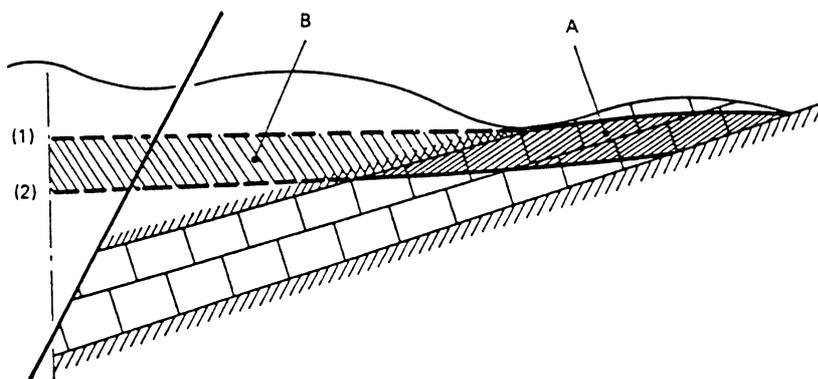
- de la hauteur piézométrique actuelle,
- et de celle à laquelle on accepte de rabattre la nappe captive.

Cependant, ce coefficient S est environ 1.000 à 10.000 fois plus petit que la porosité de drainage ω_d . Par exemple, pour une nappe captive:



Il faut bien voir que la surface balayée par le niveau piézométrique ne représente rien de réel: ici, par exemple, elle se situe en partie dans l'air (nappe initialement artésienne), en partie dans les premiers mètres du sol.

Enfin, il ne faut pas oublier que si l'on rabat le niveau piézométrique d'une nappe captive en-dessous du toit de la nappe, celle-ci devient libre: la réserve supplémentaire ainsi mobilisée se calcule comme celle d'une nappe libre ordinaire. Par exemple:



Si on rabat la nappe des dolomies de Brignoles de (1) à (2), le volume d'exhaure est l'aire A multipliée par la porosité de drainage plus l'aire B multipliée par le coefficient d'emmagasinement.

6.3. CONDITIONS AUX LIMITES ET CONDITIONS INITIALES USUELLES

Nous avons établi, au Chap.5, l'équation de la diffusivité, qui est une équation aux dérivées partielles de type elliptique en régime permanent ($\frac{\partial h}{\partial t} = 0$) ou parabolique en régime transitoire ($\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$). Nous venons maintenant de voir les différents types de nappes que l'on rencontre en pratique, et qui sont donc les "domaines" où nous allons chercher à intégrer l'équation de la diffusivité.

Pour ce faire, il nous faut cependant préciser d'abord les "conditions aux limites" de ces domaines d'intégration. On connaît, en mathématique, trois types de conditions aux limites:

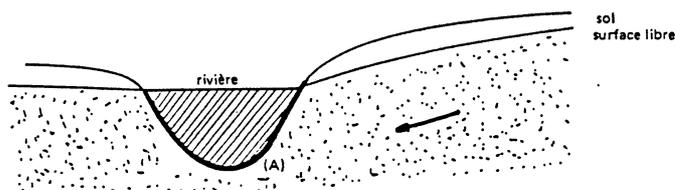
- les conditions de Dirichlet, qui portent sur la variable: h imposé;
- les conditions de Neumann, qui portent sur la dérivée 1^o de la variable: $\frac{\partial h}{\partial n}$ imposé;
- les conditions de Fourier, qui portent sur h et $\frac{\partial h}{\partial n}$: $h + \alpha \frac{\partial h}{\partial n}$ imposé.

Nous y ajouterons un quatrième type: les conditions de surface libre ou de suintement, qui sont des conditions aux limites doubles. Puis nous examinerons le problème des conditions initiales.

a) Limites à potentiel imposé

On impose des conditions de Dirichlet sur une limite si la charge hydraulique à la limite est indépendante des conditions de circulation dans la nappe.

Ce sera généralement le contact d'une nappe avec un plan d'eau libre (mer, lac, rivière, ...).



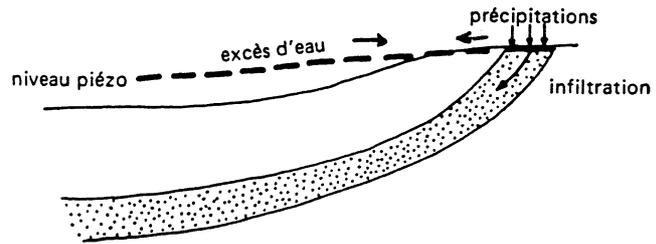
Le long du contact (A) nappe-rivière, le potentiel (la charge hydraulique) est constant et imposé par la cote de l'eau dans la rivière.

La rivière peut aussi bien alimenter que drainer la nappe.

En plan, le cours d'une rivière peut ainsi constituer une limite à potentiel d'une nappe; la charge dans la rivière varie bien sûr le long de celle-ci et, éventuellement, au cours du temps, mais c'est une donnée exogène à la nappe.

Un exutoire de nappe (ligne de source) peut également être considéré comme une limite à potentiel imposé, celle de la cote d'eau dans la source, tant que la nappe s'écoule vers l'extérieur.

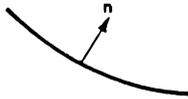
Les affleurements d'une nappe peuvent également être considérés, dans certains cas, comme une limite à potentiel imposé, tant que le taux d'infiltration de l'eau de pluie sur les affleurements est supérieur au flux d'eau s'écoulant vers l'intérieur de la nappe.



Autrement dit, la nappe est supposée être toujours "gorgée d'eau" sur ses affleurements, l'excès d'eau infiltré étant drainé par un réseau de rivières en surface.

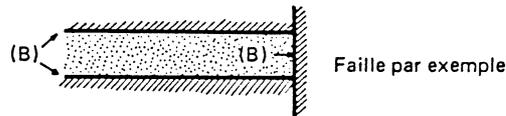
b) Limites à flux imposé

C'est une condition de Neumann. En effet, imposer une valeur du gradient de charge normal à la limite, $\frac{\partial h}{\partial n}$ revient, d'après la loi de Darcy, à imposer la valeur du flux: $-K \frac{\partial h}{\partial n}$ ou: $-T \frac{\partial h}{\partial n}$ sur cette limite.



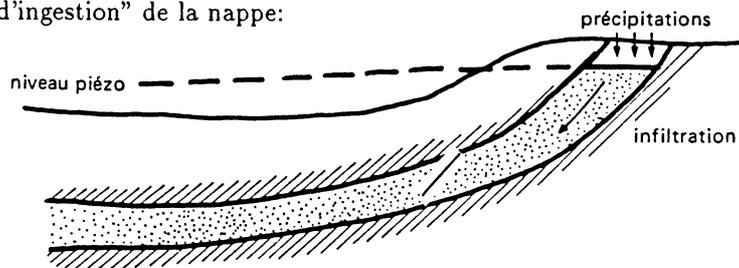
On distingue:

- les limites à *flux nul*: $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$. Par exemple, le contact d'une formation aquifère avec un imperméable:



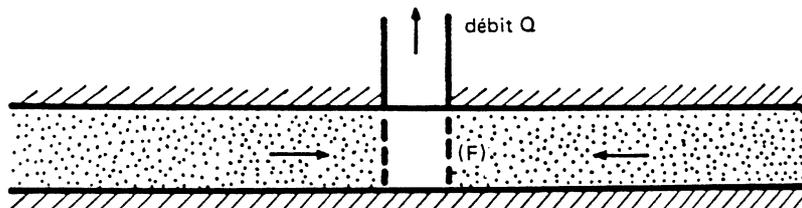
- les limites à *flux imposé non nul*:

- . Par exemple, un affleurement dans une zone où le taux d'infiltration de la pluie est *inférieur* aux possibilités "d'ingestion" de la nappe:



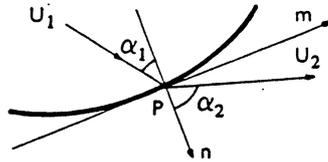
C'est le taux d'infiltration de la pluie qui fera le flux entrant.

- . Un prélèvement à débit imposé dans un ouvrage (puits, tranchée, ...) constitue également une limite à flux imposé:



$$\int_{(F)} K \frac{\partial h}{\partial n} d\sigma = Q$$

Enfin, le contact entre deux aquifères contigus à perméabilité différente peut, dans certains cas, être traité comme une limite à flux imposé, si le contraste de perméabilité est très élevé. En effet, on peut écrire à la limite, quelles que soient les perméabilités K_1 et K_2 supposées isotropes:



$$h_1 = h_2 \quad \text{(égalité des charges)}$$

$$K_1 \frac{\partial h_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial h_2}{\partial n} \quad \text{(égalité des flux)}$$

On peut de plus apprécier l'angle de réfraction de la vitesse U . Comme $h_1 = h_2$ quel que soit le point P du contact 1-2, on peut écrire:

$$\frac{\partial h_1}{\partial m} = \frac{\partial h_2}{\partial m} \quad ; \quad \text{Comme} \quad U_i = -K_i \frac{\partial h_i}{\partial n}$$

soit:

$$\frac{U_1 \sin \alpha_1}{K_1} = \frac{U_2 \sin \alpha_2}{K_2}$$

En outre, l'égalité des flux peut s'écrire:

$$U_1 \cos \alpha_1 = U_2 \cos \alpha_2$$

On en tire alors:

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{K_1} = \frac{\text{tg} \alpha_2}{K_2}$$

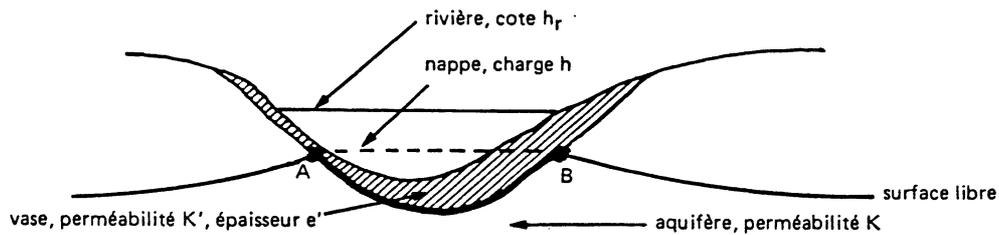
Pour en revenir à la notion de conditions aux limites, si le domaine 2 auquel on s'intéresse est en contact par endroits avec un domaine 1 à perméabilité beaucoup plus faible:

$$K_1 \ll K_2$$

On peut, dans certains cas, admettre que les écoulements dans le milieu 1 ne sont pas perturbés par ceux du milieu 2: le flux $K_1 \frac{\partial h_1}{\partial n}$ arrivant à la limite est donc une donnée pour le problème dans le milieu 2. C'est, par exemple, souvent le cas pour les écoulements d'une nappe de coteau latérale (milieu 1) vers une nappe alluviale très perméable (milieu 2).

c) Conditions de Fourier

Imaginons une rivière drainant (ou alimentant) une nappe libre, mais dont le fond serait colmaté par une couche de vase peu perméable.



La différence de charge $\Delta h = h_{\text{rivière}} - h_{\text{nappe}}$ crée le gradient nécessaire à l'écoulement d'un certain débit q par unité de surface de contact nappe-rivière d'après la loi de Darcy.

$$q = K' \frac{\Delta h}{e'} = K' \frac{h_r - h}{e'}$$

Mais, toujours d'après la loi de Darcy, ce débit q évalué dans l'aquifère est donné par:

$$q = -K \frac{\partial h}{\partial n}$$

\vec{n} normale à la surface de contact orientée vers la rivière.

Par conservation du flux à la traversée de l'interface AB, on peut donc écrire:

$$-K \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{K'}{e'} h = \frac{K'}{e'} h_r$$

ce qui est, par définition une condition de Fourier.

d) Surface libre

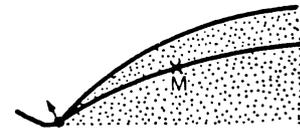
Deux conditions définissent une surface libre:

- $p =$ pression atmosphérique sur tout point M de la surface libre.

Exprimé en charge, on prend par convention 0 pour la pression atmosphérique, et on écrit:

$$h = z$$

(charge hydraulique en M égale à la cote en M)



- de plus, la surface libre est une surface à flux nul si la nappe n'est pas alimentée par sa surface:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

C'est donc une deuxième condition imposée à la même surface.

- Parfois cependant, la nappe est alimentée par sa surface libre, et le flux qui la traverse est donné:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = a$$

n normale orientée vers l'extérieur

Il en va de même si une évaporation reprend de l'eau de la nappe (a est alors négatif).

Tout le problème de la surface libre est que l'on ne connaît pas a priori sa position: on est amené à rechercher, par approximations successives, une surface dans l'espace qui vérifie simultanément:

$$h = z$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = a$$

Ce problème est donc assez délicat. On se donne d'habitude a priori une position estimée de la surface libre, ce qui délimite le domaine d'intégration. On fixe sur cette limite la charge hydraulique ($h = z$) et on vérifie, après intégration de l'équation, que le flux calculé $K \frac{\partial h}{\partial n}$ est correct. S'il ne l'est pas, on modifie dans un sens souhaitable la position de la surface libre et on recommence le calcul.

Une autre façon de résoudre le problème est de ne pas considérer la surface libre comme une limite de l'écoulement, mais de représenter dans un même continuum la nappe saturée et la zone non saturée sus-jacente jusqu'à la surface du sol. Il faut alors résoudre l'équation de la diffusivité du milieu non saturé (voir § 9.1.). La surface libre est alors obtenue comme le lieu des points où la pression est nulle.

En régime transitoire, l'équation de la diffusivité dans une nappe limitée par une surface libre s'écrit, pour un milieu homogène:

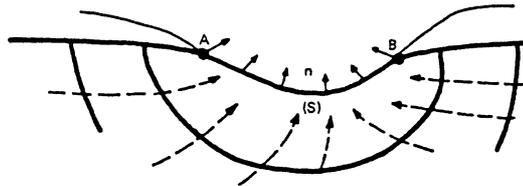
$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \text{ dans la nappe}$$

$$K_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 = \omega \frac{\partial h}{\partial t} + (K_z - q) \frac{\partial h}{\partial z} - q$$

sur la surface libre, où q est le flux (volume par unité de surface horizontale, par unité de temps) des échanges entre la nappe et l'extérieur (évaporation, infiltration) à travers la surface libre, compté positivement s'il est extrait.

e) Surface de suintement

Quand l'eau d'une nappe s'écoule vers l'extérieur, le long d'une ligne d'émergence:



la surface de contact (S) est dite surface de suintement. La condition est alors:

$$h = z \quad (\text{car la pression est par définition égale à la pression atmosphérique})$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} < 0 \quad (\text{si } n \text{ est orienté vers l'extérieur}). \text{ En effet, le flux de la nappe est sortant.}$$

La surface de suintement pose le même genre de problème que la surface libre: bien que l'on connaisse la cote z le long de la surface de suintement, on est obligé de rechercher par approximations successives les points A et B où commence et s'achève respectivement la surface de suintement et où débute la surface libre.

On impose généralement la position de la surface, et on vérifie ultérieurement que le flux est bien sortant.

f) Absence de conditions aux limites

On peut enfin, dans certains cas, s'abstraire des conditions aux limites quand on suppose le domaine d'intégration infini. Les conditions aux limites sont alors rejetées à l'infini sans que soit précisée leur nature.

Ce genre de situation est très souvent utilisé pour rechercher des solutions analytiques de l'équation de diffusivité, tandis que les méthodes numériques ou analogiques sont mieux adaptées au cas des conditions aux limites fixes et connues. Nous en verrons des exemples par la suite.

g) Conditions initiales

Rappelons enfin que, pour les problèmes transitoires ($\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$, équations paraboliques), il faudra de plus définir les conditions initiales du problème, soit la valeur de la charge h en tout point du domaine pour $t = 0$.

Chapitre 7

SOLUTIONS EN REGIME PERMANENT DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE

7.1. Propriétés générales de l'équation de diffusivité

7.2. Ecoulement parallèle: 1^{ère} solution en régime permanent.

7.3. Solutions à 2 dimensions en écoulement radial

7.4. Solution élémentaire en coordonnées sphériques

7.5. Potentiel complexe à deux dimensions

7.1. PROPRIETES GENERALES DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE

a) Unicité de la solution

Soit D un domaine d'intégration donné de l'équation de la diffusivité, muni de ses conditions aux limites et initiales.

On démontre, en analyse, que si h vérifie ces conditions aux limites et initiales, et si h vérifie de plus l'équation de diffusivité:

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

alors h est en général la solution *unique* du problème. Ceci est vrai en régime permanent comme en régime transitoire.

b) Principe de la superposition

Une remarque fondamentale est nécessaire avant d'aborder la résolution de l'équation de diffusivité: c'est sa linéarité en h .

En effet, dans un domaine D à limites fixes dans l'espace, ou infini, l'équation:

$$\operatorname{div} (\mathbf{K} \operatorname{grad} h) = \mathbf{S} \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

est linéaire en h et q . Donc, si (h_1, q_1) et (h_2, q_2) sont deux solutions particulières de l'équation de diffusivité vérifiant les conditions aux limites données, alors $\alpha h_1 + \beta h_2$ est solution de la même équation, avec les débits $\alpha q_1 + \beta q_2$, et les conditions aux limites qui en résultent.

- Exemple: Supposons que, dans un domaine D , une nappe en écoulement en régime permanent vérifie:

$$\operatorname{div} (T \operatorname{grad} h_o) = q_o$$

Si l'on perturbe cet écoulement par la mise en route, par exemple, d'un pompage au débit q au temps $t = 0$ dans un point donné, la distribution des charges hydrauliques h dans l'aquifère sera solution de l'équation:

$$\operatorname{div} (T \operatorname{grad} h) = S \frac{\partial h}{\partial t} + q_o + q$$

h vérifiant les mêmes conditions aux limites que h_o , et ayant pour condition initiale $h = h_o$.

Définissons alors le "rabattement" dans la nappe par:

$$s = h_o - h$$

En substituant $h = h_o - s$ dans l'équation précédente, il vient:

$$\operatorname{div} [T \operatorname{grad} (h_o - s)] = S \frac{\partial}{\partial t} (h_o - s) + q_o + q$$

Du fait de la linéarité, ceci s'écrit:

$$\operatorname{div} (T \operatorname{grad} h_o) - \operatorname{div} (T \operatorname{grad} s) = S \frac{\partial h_o}{\partial t} - S \frac{\partial s}{\partial t} + q_o + q$$

soit encore, en tenant compte de la première relation que vérifie h_o , et sachant que $\frac{\partial h_o}{\partial t} = 0$ (régime permanent):

$$\operatorname{div} (T \operatorname{grad} s) = S \frac{\partial s}{\partial t} - q$$

Le rabattement s vérifie l'équation de la diffusivité avec les conditions suivantes:

- initiales : $s = 0$ pour $t = 0$

- limites à potentiel imposé $h = \text{constante}$

$$\rightarrow s = 0 \quad \text{puisque } h = h_o - s = \text{constante}$$

- limites à flux imposé $\frac{\partial h}{\partial n} = \text{constante}$

$$\rightarrow \frac{\partial s}{\partial n} = 0 \quad \text{puisque } \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial h_o}{\partial n} - \frac{\partial s}{\partial n} = \text{constante.}$$

Autrement dit, le rabattement s dû à la mise en route du pompage q vérifie, dans le domaine D , une équation dont les conditions aux limites et initiales sont bien simplifiées par rapport au problème initial. De plus, au pompage αq correspondra le rabattement αs : par le calcul d'une seule solution s du rabattement pour un débit q donné, on est capable de donner une infinité de solutions $h = h_o - \alpha s$ au problème du pompage à un débit quelconque, puits distincts, etc. . . .

On pourra de même superposer l'influence (en rabattement) du pompage dans plusieurs puits distincts, etc. . . .

Nous utiliserons très souvent cette propriété de linéarité pour superposer des solutions connues (principe des images par exemple) ou même forger une nouvelle solution par *intégration* d'une solution donnée.

Il faudra se souvenir cependant que l'équation de la diffusivité n'est linéaire, à strictement parler, qu'à trois dimensions ou à deux dimensions (en plan) pour une nappe captive; pour une nappe libre, la transmissivité T peut varier avec la charge h , entraînant la non-linéarité de l'équation et l'impossibilité d'appliquer rigoureusement le principe de superposition.

De plus, en coupe, on ne peut appliquer ce principe pour une nappe libre, car la position de la surface libre varie et le domaine d'intégration n'est plus fixe.

Les problèmes de nappe libre sont en conséquence plus délicats à traiter. Nous verrons plus loin que la meilleure façon de les traiter est parfois de prendre en compte la zone non saturée sus-jacente. Le problème de la non-linéarité n'en est pas pour autant résolu.

c) Anisotropie

Nous étudierons principalement des solutions analytiques en terrain homogène isotrope. Les terrains anisotropes peuvent se ramener à un problème équivalent isotrope par changement des coordonnées.

Si K_x, K_y, K_z sont les trois directions principales d'anisotropie, la loi de Darcy et l'équation de diffusivité s'écrivent (ces perméabilités étant homogènes dans l'espace):

$$\begin{cases} U_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x} & U_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad U_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \\ K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \end{cases}$$

Changement de coordonnées:

$$x' = \sqrt{\frac{K}{K_x}} x \quad y' = \sqrt{\frac{K}{K_y}} y \quad z' = \sqrt{\frac{K}{K_z}} z$$

où K est un coefficient quelconque ayant les dimensions d'une perméabilité:

$$\frac{\partial h}{\partial x'} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dx'} = \sqrt{\frac{K_x}{K}} \frac{\partial h}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x'} \right) \frac{dx}{dx'} = \frac{K_x}{K} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

L'équation de diffusivité s'écrit donc:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z'^2} = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Soit une équation de Laplace ordinaire dans le nouveau système d'axe. Il faut remarquer qu'avec l'anisotropie disparaît l'orthogonalité des équipotentielles et des lignes de courant dans le système de coordonnées réelles xyz , mais qu'il subsiste dans le système $x'y'z'$: les composantes de la vitesse dans le nouveau système sont:

$$U'_x = -K \frac{\partial h}{\partial x'} \quad , \quad U'_y = -K \frac{\partial h}{\partial y'} \quad , \quad U'_z = -K \frac{\partial h}{\partial z'}$$

On en déduit que:

$$U_x = \sqrt{\frac{K_x}{K}} U'_x \quad , \quad U_y = \sqrt{\frac{K_y}{K}} U'_y \quad , \quad U_z = \sqrt{\frac{K_z}{K}} U'_z$$

Si l'on calcule le flux Q' du vecteur U' à travers une surface quelconque Σ' :

$$Q' = \int_{\Sigma'} \vec{U}' \cdot \vec{n} d\sigma' = \int_{\Sigma'} (U'_x J'_1 + U'_y J'_2 + U'_z J'_3) du dv$$

J'_i étant le cosinus de la normale à Σ' , et uv des coordonnées paramétriques quelconques de la surface Σ' .

On s'aperçoit que si l'on cherche à calculer le flux du vecteur \vec{U} dans la surface homologue Σ définie par les mêmes coordonnées paramétriques uv , on obtient les relations suivantes entre les Jacobiens (cosinus directeurs) J_1 et J'_1 des deux surfaces Σ et Σ' :

$$J'_1 = \frac{D(y'z')}{D(u,v)} = \sqrt{\frac{K^2}{K_y K_z}} J_1 \quad \text{avec} \quad J_1 = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

En remplaçant U'_x par U_x dans l'intégrale ci-dessus, on voit que:

$$Q' = \sqrt{\frac{K^3}{K_x K_y K_z}} Q \quad \text{ou} \quad Q = \sqrt{\frac{K_x K_y K_z}{K^3}} Q'$$

qui donne la relation entre les débits dans le système anisotrope et le système isotrope équivalent. Pour que ces débits soient identiques, il suffit donc de prendre $K = \sqrt[3]{K_x K_y K_z}$. Le même problème se poserait pour S , si l'on prenait une valeur différente pour K .

7.2. ECOULEMENT PARALLELE: PREMIERE SOLUTION EN REGIME PERMANENT

Une nappe en écoulement parallèle (ou uniforme) est une nappe où la vitesse est une constante (en intensité et en direction) en tout point. La charge vérifie:

$$h = ax + by + cz + d$$

qui est une solution de: $\nabla^2 h = 0$

et qui donne bien une vitesse constante: $U_x = -Ka, U_y = -Kb, U_z = -Kc$

On identifie les constantes en fonction des conditions aux limites.

Une expression polynomiale du 2^{ème} degré est solution du problème $\nabla^2 h = q$ (infiltration constante). La vitesse n'est, bien sûr, plus uniforme.

7.3. SOLUTIONS A DEUX DIMENSIONS EN ECOULEMENT RADIAL

a) Solution élémentaire de Dupuit

En coordonnées polaires (r, θ) à deux dimensions, le laplacien s'écrit:

$$\nabla^2 h = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}$$

Une solution élémentaire du problème est celle ne dépendant que de r : $\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \right)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0$$

Ceci s'intègre aisément: $r \frac{\partial h}{\partial r} = a$

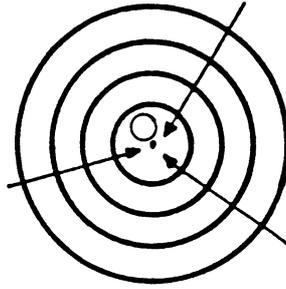
soit

$$h = a \text{ Log } r + b$$

a et b constantes,

Log = logarithme népérien.

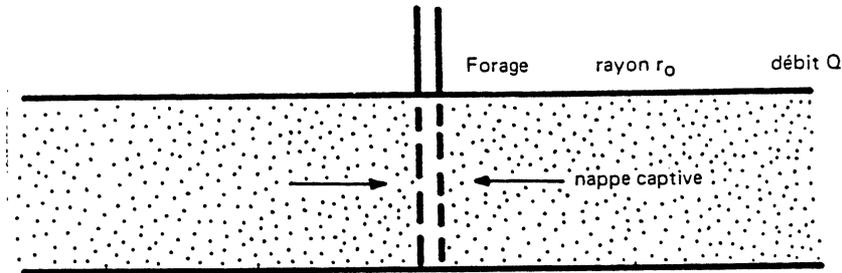
Si nous regardons cette solution en plan, c'est un écoulement convergent radialement vers l'origine:



Les équipotentiels (h constante) sont des cercles. Si on calcule le flux traversant une équipotentielle donnée à la distance r de l'origine, d'après la loi de Darcy:

$$\text{flux} = \int_0^{2\pi} r T \frac{\partial h}{\partial r} d\Theta = 2\pi T a = \text{constante} = Q$$

Ce flux constant représente donc le débit Q retiré de la nappe au point origine, par exemple dans un forage de rayon r_0 donné:



La solution élémentaire ci-dessus est donc celle d'un puits dans une nappe captive. La constante a est donnée par le débit du puits d'après l'intégrale du flux:

$$a = \frac{Q}{2\pi T}$$

La constante b est donnée par les conditions aux limites.

La condition à la limite la plus simple est d'imposer la valeur de h à la distance R de l'origine:

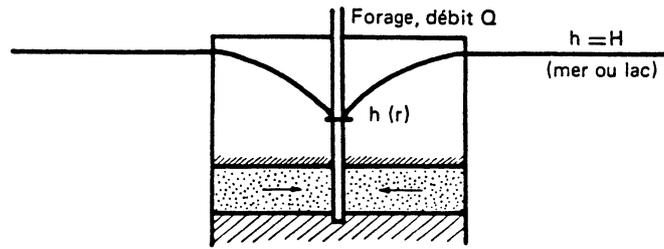
$$h = H \quad , \quad r = R$$

alors:
$$b = H - \frac{Q}{2\pi T} \text{Log } R \quad \text{Log: Népérien}$$

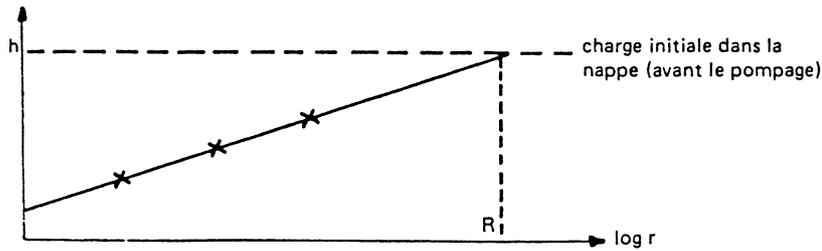
En définitive, la charge h au voisinage du forage est donnée par:

$$h(r) - H = \frac{Q}{2\pi T} \text{Log } \frac{r}{R} \quad \text{Formule de Dupuit}$$

Cette formule correspond exactement au problème du "puits dans l'île": la condition à la limite $h = H, r = R$ ne se trouve vérifiée que pour une nappe captive dans une île circulaire:



Dans la pratique cependant, un forage dans une nappe quelconque se stabilise souvent au bout d'un temps plus ou moins long (obtention d'un régime permanent) pour diverses raisons que nous examinerons par la suite (limite de réalimentation, drainance). Le profil de la charge en fonction de la distance au forage est alors une fonction logarithmique:



ce qui permet de définir un "rayon d'action fictif" R qui correspondrait à la distance du forage où le rabattement ($h_{\text{initial}} - h$) serait nul. Cette notion n'a pas de grande réalité physique, mais est souvent utilisée en pratique. Nous y reviendrons au § 8.1.3.

b) Puits dans une nappe libre

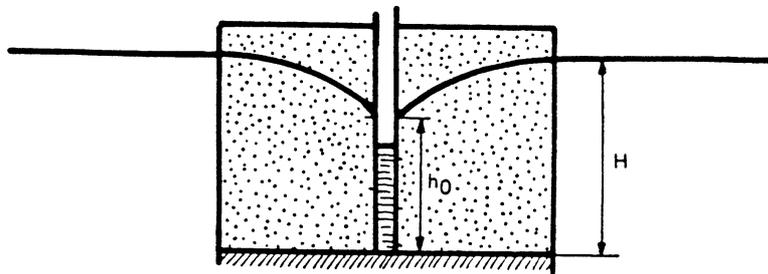
Pour une nappe libre, nous avons vu que l'équation de la diffusivité peut s'écrire, si le substratum est horizontal, et en supposant que la vitesse est toujours parallèle à ce substratum:

$$\nabla^2 h^2 = 0 \quad \text{en régime permanent.}$$

En répétant le raisonnement précédent, on en déduit immédiatement que le carré de la charge sera fonction logarithmique du rayon, pour le problème radial. Plus exactement:

$$h_o^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi K} \text{Log} \frac{r_o}{R}$$

R étant le rayon d'action défini plus haut, r_o le rayon du puits, K la perméabilité, H la charge à la limite, et h_o la charge dans la nappe au rayon du puits.



Notez que la surface de l'eau dans le puits ne se raccorde pas exactement dans la réalité en h_o ; il existe une certaine hauteur de surface de suintement dans le forage, due à la présence de la crépine du puits, qui n'est pas prise en compte ici. Le profil dans la nappe est donné par:

$$h^2 = H^2 + \frac{Q}{\Pi K} \operatorname{Log} \frac{r}{R}$$

Pour relier cette formule à celle de Dupuit appliquée au forage de rayon r_o pour une nappe captive:

$$h_o - H = \frac{Q}{2\Pi T} \operatorname{Log} \frac{r_o}{R}$$

On peut écrire pour la première (nappe libre):

$$h_o^2 - H^2 = (h_o + H)(h_o - H) = \frac{Q}{\Pi K} \operatorname{Log} \frac{r_o}{R}$$

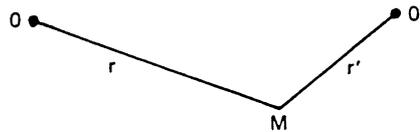
soit:

$$h_o - H = \frac{Q}{2\Pi K \left(\frac{h_o + H}{2}\right)} \operatorname{Log} \frac{r_o}{R}$$

Ces deux formules sont donc voisines, en assimilant la transmissivité moyenne dans la nappe libre à la perméabilité K multipliée par l'épaisseur moyenne $\frac{h_o + H}{2}$.

c) Principe des images

Considérons deux puits distincts, de centre O et O' pompant chacun Q et Q' . Nous cherchons la valeur de la charge h en tout point du domaine. D'après le principe de superposition, on peut l'obtenir en additionnant les solutions logarithmiques élémentaires de chacun de ces puits:



En M , nous pouvons écrire:

$$h_M = \frac{Q}{2\Pi T} \operatorname{Log} r + \frac{Q'}{2\Pi T} \operatorname{Log} r' + \text{constante}$$

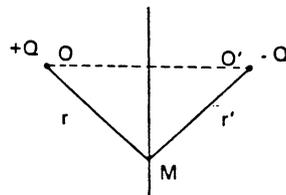
On identifiera la constante en fonction des conditions aux limites, si faire se peut.

- 1^{er} cas particulier: limite à potentiel imposé:

Supposons que dans le puits O' , on pompe un débit $(-Q)$, c'est-à-dire en fait que l'on injecte le débit Q ; la solution s'écrit:

$$h_M = \frac{Q}{2\Pi T} \operatorname{Log} \frac{r}{r'} + \text{constante}$$

Si nous nous intéressons aux points M où $r = r'$ (c'est-à-dire la médiatrice de OO'):



$$h_M = \text{constante}$$

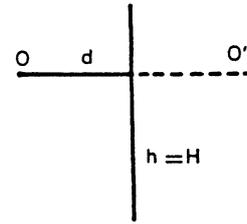
Autrement présenté, la charge h est imposée et constante sur la médiatrice de OO' .

Nous venons donc de découvrir une solution exacte au problème suivant: un puits O unique situé à une distance d d'une limite rectiligne infinie à potentiel constant (charge imposée: $h = H$).

$$\text{Solution: } h = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log } \frac{r}{r'} + H$$

r étant la distance au forage réel O , et r' la distance au point fictif O' symétrique de O par rapport à la limite.

Cette solution est bien la solution unique du problème posé, puisqu'elle vérifie les conditions aux limites et l'équation de diffusivité.



La seule réserve est qu'au forage O , le rayon du forage r_o soit négligeable devant la distance $2d$ à O' pour que la charge h_o au forage O soit bien une constante tout le long de la circonférence de ce forage. Si ce n'est pas le cas, O et O' ne sont plus les centres des forages, mais les foyers des faisceaux de cercle, lieux des points où le rapport r/r' est constant.

On a l'habitude d'appeler le point fictif O' le "forage image" du forage O , image de signe contraire, car le débit du forage fictif image est l'opposé de celui du puits réel.

Une limite à potentiel imposé rectiligne associée à un forage se représente donc par un forage image fictif symétrique.

Il ne faut pas perdre de vue cependant que la solution ci-dessus représente aussi le cas de deux forages de même débit, mais de signe opposé, dans un milieu infini.

- 2^{ème} cas particulier: limite à flux nul:

Dans l'expression initiale à deux forages, O et O' , faisons maintenant $Q' = Q$.

$$h_M = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log } rr' + \text{constante}$$

Par symétrie, on remarque immédiatement que, sur la médiatrice de OO' :

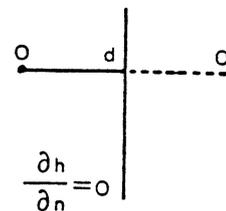
$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

On peut d'ailleurs facilement le démontrer en passant en coordonnées cartésiennes $r^2 = x^2 + y^2$ et en calculant $\frac{\partial h}{\partial x}$.

Nous avons donc trouvé la solution analytique du problème d'un forage unique O situé à une distance d d'une limite rectiligne infinie à flux nul:

$$\text{Solution: } h = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log } rr' + \text{constante}$$

r' étant la distance au "forage fictif image" symétrique du forage O par rapport à la limite, mais image de même signe cette fois-ci (débit $+Q$).

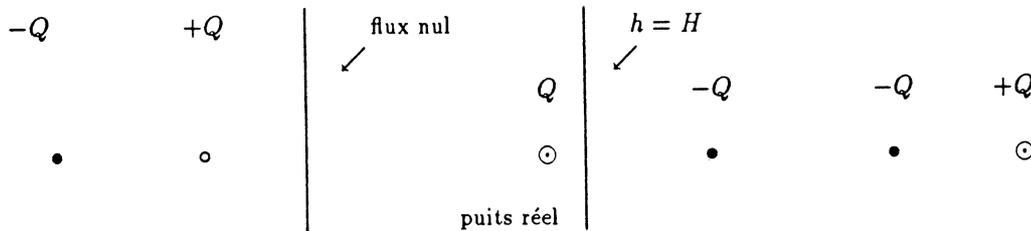


Le même commentaire s'applique à la relation entre le rayon du forage r_o vis-à-vis de d , et à la représentation de la solution pour deux forages réels dans un milieu infini.

- *Plusieurs limites.*

Par ce principe des images (un puits engendrant une "image" par rapport à une limite), on peut donc représenter un problème à plusieurs limites.

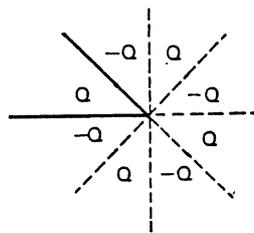
- Premier exemple: demi-nappe alluviale: deux limites parallèles, l'une à potentiel imposé, l'autre à flux nul (le coteau):



Cependant, chaque puits fictif image engendre une autre image fictive (du même signe ou de signe contraire) par rapport à l'autre limite: on aboutit ainsi à une double série infinie d'images de plus en plus distantes.

On se limite, dans la pratique, à quelques termes.

- Deuxième exemple: confluent de deux rivières (limites à potentiel imposé):



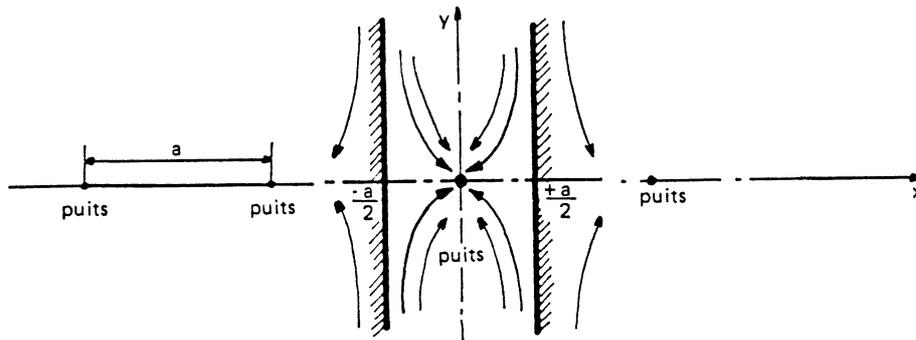
Si l'angle des deux limites est exactement de $\frac{2\pi}{n}$ (n entier), on génère n images fictives disposées en cercle comme ci-dessus.

etc... On peut multiplier les exemples d'utilisation du principe des images.

d) **Ligne de puits**

Il est parfois utile de considérer un alignement d'une infinité de puits distants entre eux de a , et pompant le même débit Q , dans une nappe infinie.

La solution est évidemment donnée par la superposition d'une infinité de solutions élémentaires. Mais on peut aussi tirer partie de la symétrie de l'écoulement, car les médiatrices des segments joignant deux puits voisins sont des lignes de courant qui délimitent l'écoulement vers chacun des puits:



L'écoulement est donc la juxtaposition de "modules" identiques, défini par exemple dans $x \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right]$.

Schneebeli a montré que, dans un tel module, la solution élémentaire s'exprime par:

$$h = \frac{Q}{4\Pi T} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Ch} \frac{2\Pi y}{a} - \operatorname{Cos} \frac{2\Pi x}{a}}{2}$$

où $\operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ est le cosinus hyperbolique.

Quand y devient grand devant a (en pratique, $y > a$), le terme Ch devient prépondérant devant le terme Cos , et on peut écrire:

$$h \simeq \frac{Q}{2aT} \left[y - a \frac{\operatorname{Log} 2}{\Pi} \right]$$

Ceci correspond à un écoulement uniforme de gradient:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{Q}{2aT}$$

On peut donc assimiler la ligne de puits, dès que l'on s'éloigne, à une tranchée drainante continue en $y = 0$, qui prélèverait dans la nappe le même débit que la ligne de forage, et dont la charge serait:

$$h(y = 0) = -\frac{Q}{2\Pi T} \operatorname{Log} 2$$

en prenant comme potentiel de référence:

$$h = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0, \quad x = \pm a/2$$

dans la solution exacte complète précédente.

Cette considération est souvent utile pour des projets de rabattements, quand on veut passer d'une ligne de puits à une tranchée ou inversement.

On généralise facilement au cas où la ligne de puits est parallèle à une limite, par la théorie des images.

e) Courbe caractéristique d'un forage

En régime permanent, le débit d'un forage donné peut s'exprimer en fonction du rabattement (charge initiale moins charge en régime stabilisé) dans le forage:

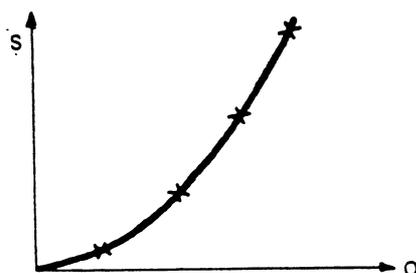
$$Q = 2\Pi \frac{(H - h)}{\operatorname{Log} \frac{R}{r_o}} \quad \text{en nappe captive (formule de Dupuit)}$$

(r_o = rayon du forage)

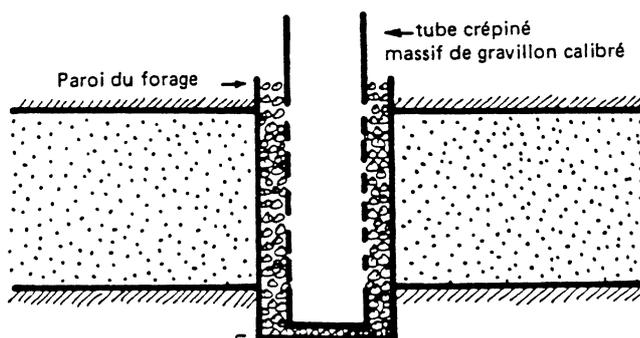
$$Q = \Pi K \frac{(H^2 - h^2)}{\operatorname{Log} \frac{R}{r_o}} \quad \text{en nappe libre}$$

On en déduit que la courbe d'évolution du débit Q en fonction du rabattement stabilisé $s = H - h$ devrait être une droite en nappe captive et une parabole en nappe libre.

Dans la réalité, la "courbe caractéristique" d'un forage donnant le rabattement s en fonction de Q est toujours d'allure parabolique:



En effet, il existe toujours au voisinage du forage des pertes de charge quadratique (terme $\frac{y^2}{2g}$ non négligeable) dans les premiers décimètres de terrain entourant le puits, dans le massif de gravier filtrant et dans la crépine centrale:



Coupe d'un forage

La courbe caractéristique du forage en rend compte. Cette courbe est surtout utile pour dimensionner la puissance de la pompe qu'il faudra installer pour extraire un débit donné.

Dans la pratique, on admet que la forme quadratique des pertes de charge dans le massif, dans la crépine, et même dans le tubage du forage, permet de poser une loi de variation du rabattement *stabilisé* avec le débit de la forme:

$$s = AQ + BQ^2$$

On réalise donc des essais sur le forage à plusieurs paliers de débit, pendant des temps suffisants pour que le régime soit à peu près stabilisé (s ne varie que peu avec le temps, en pratique, quelques heures). On trace alors s/Q en fonction de Q , qui doit être une droite de pente B et d'ordonnée à l'origine A . Walton caractérise l'état du puits par la valeur de B :

$B < 675 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	Bon puits, bien développé*
$675 < B < 1350 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	Médiocre
$B > 1350 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	Puits comaté ou détérioré
$B > 5400 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{s})^2$	Puits irrécupérable

Voir Levassor et Talbot, 1976.

* Le développement d'un puits dans un milieu alluvionnaire consiste, par alternance de pompage et d'injection (pistonnage), à mettre les particules fines en mouvement dans la formation au voisinage du forage, pour les pomper et les extraire. On améliore ainsi la perméabilité du sédiment près du puits, donc les pertes de charge quadratiques. En milieu calcaire, le développement consiste à injecter de l'acide (HCl) pour dissoudre la roche et ouvrir les fissures. En milieu fissuré, on peut également tirer à l'explosif dans le forage pour augmenter localement la fissuration. En milieu contenant des particules argileuses, on utilise des flocculants (polyphosphates).

7.4. SOLUTION ELEMENTAIRE EN COORDONNEES SPHERIQUES

Une solution ne dépendant que de la distance ρ à l'origine vérifie:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) = 0$$

soit:

$$h = -\frac{a}{\rho} + b$$

On montre de même que cette solution est un écoulement convergent vers l'origine, correspondant à un prélèvement constant Q dans toute sphère de rayon R centrée à l'origine. Le débit Q est:

$$Q = 4\pi a$$

Pour donner un exemple de calcul d'une nouvelle solution par *intégration* d'une solution élémentaire, en suivant Schneebeli, on peut rechercher la solution correspondant à un prélèvement à débit constant sur un segment de droite $z = \pm C$ avec une densité de prélèvement constant $dQ = \lambda d\xi$ sur ce segment.

La solution élémentaire pour un prélèvement en un point ξ du segment $(+C, -C)$ de l'axe z est:

$$h = \frac{dQ}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2}}$$

d'où en intégrant:

$$H = \int_{-C}^{+C} \frac{\lambda d\xi}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi} \text{Log} \frac{z + C + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + C)^2}}{z - C - \sqrt{x^2 + y^2 + (z - C)^2}}$$

7.5. POTENTIEL COMPLEXE A DEUX DIMENSIONS

Si la perméabilité K (ou la transmissivité T) est constante, homogène et isotrope, on définit le "potentiel des vitesses" $\phi = Kh$ (ou Th).

La loi de Darcy et l'équation de diffusivité s'écrivent, en fonction de ϕ :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \\ \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors définir une fonction conjuguée ψ , dite "fonction de courant" par:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases}$$

Cette définition est possible car $\nabla^2 \phi = 0$, ce qui entraîne $\nabla^2 \psi = 0$. Les conditions ci-dessus sont les "conditions de Cauchy" de deux fonctions ϕ et ψ définissant une "fonction analytique".

$$\Gamma = \phi + i\psi$$

fonction analytique de la variable complexe:

$$z = x + iy$$

(et non de x et y séparément - cf. conditions de Cauchy).

La fonction Γ est appelée le "potentiel complexe" de l'écoulement.

Pourquoi a-t-on appelé ψ la "fonction de courant" ? Il est facile de s'en rendre compte.

Soit P et P' deux points voisins du plan complexe:

Calculons le flux traversant le segment PP' :

$$dQ = \vec{U} \cdot \vec{n} ds$$

$$\text{avec } \vec{U} \begin{cases} -K \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -K \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{n} ds \begin{cases} -dy \\ dx \end{cases}$$

$$\text{Alors: } dQ = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi$$

Donc, entre deux points A et B , le flux traversant *n'importe quelle* courbe joignant A et B est:

$$\text{flux} = \psi(B) - \psi(A)$$

donc, les lignes $\phi = \text{constante}$ sont les équipotentiels de l'écoulement, et
les lignes $\psi = \text{constantes}$ sont les lignes de courant de l'écoulement d'où le nom de "fonction de courant" de ψ .

- Exemple: La solution élémentaire radiale à deux dimensions s'exprime très aisément en potentiel complexe:

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\Gamma(z) = \frac{q}{2\Pi} \text{Log } z = \frac{q}{2\Pi} \text{Log } r + i \frac{q\theta}{2\Pi} = \phi + i\psi$$

$$\text{Donc, les équipotentiels sont: } \phi = \frac{Q}{2\Pi} \text{Log } r$$

On retrouve bien la même expression que plus haut si on se souvient que le potentiel des vitesses est $\phi = Kh$ (ou Th).

L'intérêt du potentiel complexe est de permettre l'emploi de nombreuses méthodes analytiques de transformation.

En particulier, les transformations conformes (l'inversion, par exemple) qui conservent les angles peuvent être appliquées à ce type de problème et permettre de trouver analytiquement des solutions simples à des problèmes qui, apparemment n'en avaient pas. Voir en particulier Polubarinova-Kochina pour ce type d'approche de l'hydrogéologie mathématique.

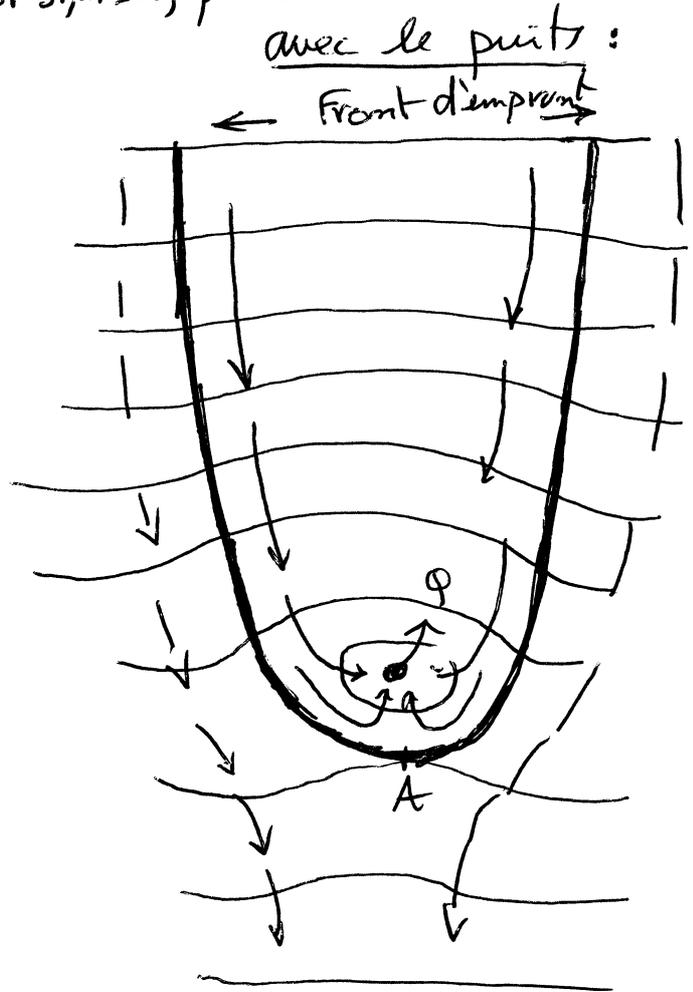
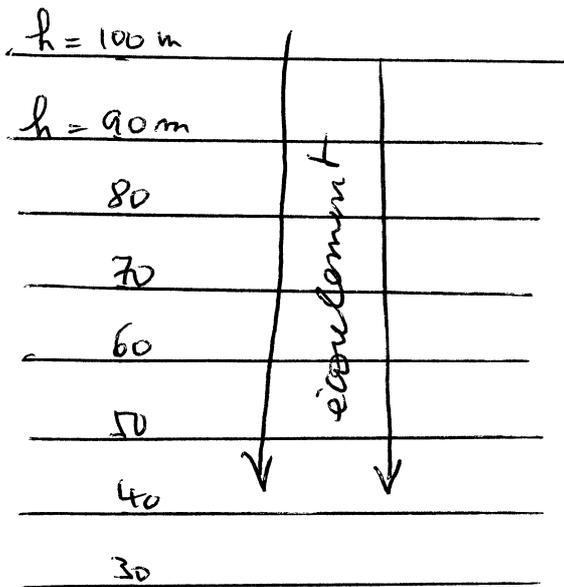
Le principe de la démarche est le suivant: on transforme le plan complexe x, y en un plan u, v où le problème d'écoulement posé a un potentiel Γ connu. Par la transformation inverse, on obtient le potentiel complexe Γ' dans le plan (x, y) initial. La solution élémentaire du problème 7.3.d., par exemple, a été calculée par Schneebeli en utilisant la transformation conforme:

$$\Gamma' = \text{Sin } \frac{\Pi\Gamma}{a}$$

qui transforme le plan infini en un "module" $x \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right]$ limité comme on le voulait. Il suffit ensuite de séparer parties réelles et imaginaires.

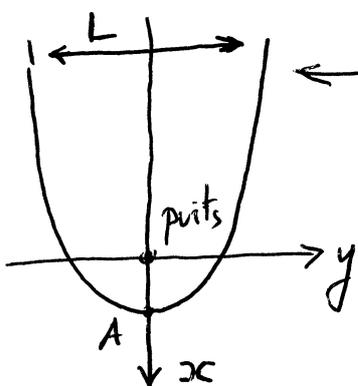
Adition = Front d'emprunt d'un captage de débit Q dans un écoulement

initialement parallèle : GRUBB, S (1993) Analytical model For estimation of Steady-State Capture zones of pumping wells in confined and unconfined aquifers. Ground Water Sans le puits : Vol 31, n° 1, p 27-32



- à l'intérieur de la courbe enveloppe (noire) toutes les lignes de courant vont au puits
- à l'extérieur, aucune ne va au puits. Ceci définit donc la zone à protéger.

Equation de la courbe noire =



$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} \left[\frac{2\pi Ti}{Q} y \right]}$$

$$L \text{ (pour } x \rightarrow \infty) = \frac{Q}{Ti}$$

$$x_A = \frac{Q}{2\pi Ti} \text{ (point de stagnation)}$$

T = transmissivité
 Q = débit du puits
 i = gradient hydrologique en régime naturel

SOLUTIONS TRANSITOIRES DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE ESSAIS DE DEBITS

- | | |
|--|--|
| <p>8.1. Solutions élémentaires en coordonnées radiales.</p> <p>8.1.1. Solution de Theis</p> <p>8.1.2. Approximation logarithmique de Jacob</p> <p>8.1.3. Relation du régime transitoire avec le régime permanent</p> <p>8.1.4. Application du principe de superposition</p> <p>8.2. Interprétation d'un essai de débit</p> | <p>8.3. Drainance</p> <p>8.3.1. Intégration de l'équation de diffusivité en tenant compte des épontes</p> <p>8.3.2. Solutions analytiques radiales du problème de la drainance</p> <p>8.4. Corrections particulières à apporter à un essai de débit</p> <p>8.5. Autres solutions (à une dimension) de l'équation de diffusivité</p> <p>8.6. Mesures ponctuelles de perméabilité perméabilité in situ</p> |
|--|--|

Nous allons rechercher quelques solutions analytiques particulières usuelles de l'équation de diffusivité en régime transitoire:

$$\nabla^2 h = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{à deux dimensions (nappe captive ou nappe libre selon l'hypothèse de Dupuit)}$$

ou

$$\nabla^2 h = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{à trois dimensions}$$

Remarquez que les propriétés générales de l'équation de diffusivité (unicité de la solution, linéarité, anisotropie) donnée au § 7.1. sont valables en régime transitoire.

8.1. SOLUTIONS ELEMENTAIRES EN COORDONNEES RADIALES

En coordonnées radiales, l'équation de diffusivité s'écrit à deux dimensions et en supposant que la solution n'est fonction que de la distance:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Posons:

$$\alpha = \frac{T}{S} \quad \text{ou} \quad \frac{K}{S_s} \quad \alpha \text{ s'appelle la diffusivité de la nappe.}$$

Une solution élémentaire est la "solution de Laplace"*

$$h = C \left[e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}} t^{-\frac{n}{2}} \right]$$

$$\text{avec } n = 1, 2 \text{ ou } 3 \begin{cases} r = x & (n = 1) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} & (n = 2) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (n = 3) \end{cases}$$

Elle correspond à une émission instantanée et ponctuelle de fluide à l'origine. Nous verrons d'autres solutions ultérieurement.

8.1.1. Solution de Theis

Theis (1935) a proposé une solution intégrale (possible d'après la linéarité des équations) de cette solution élémentaire, correspondant à une émission ponctuelle et *continue* de fluide à l'origine, à deux dimensions:

$$h(r, t) = \int_0^t C \frac{e^{-\frac{r^2 S}{4T\tau}}}{\tau} d\tau$$

qui est également solution de l'équation de diffusivité, avec conditions aux limites repoussées à l'infini et condition initiale $h = 0 \forall r$.

Calculons, avec cette solution, le débit traversant un cylindre de rayon r :

$$Q(r, t) = -2\pi r T \frac{\partial h}{\partial r} = -2\pi r T \frac{\partial}{\partial r} \left[C \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2 S}{4T\tau}}}{\tau} d\tau \right] = \pi r^2 C S \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2 S}{4T\tau}}}{\tau^2} d\tau$$

$$Q(r, t) = 4\pi T C e^{-\frac{r^2 S}{4Tt}}$$

$$\text{si } r \rightarrow 0, \quad Q \rightarrow 4\pi T C$$

Si l'on assimile à zéro le rayon d'un puits, le débit échangé est donc constant à l'origine, et $C = \frac{Q}{4\pi T}$. La solution obtenue est donc celle du pompage ou de l'injection à débit constant dans un puits de rayon négligeable.

$$h(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2 S}{4T\tau}}}{\tau} d\tau$$

Si l'on pose:

$$u = \frac{4Tt}{r^2 S}$$

$$h(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_{1/u}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \frac{Q}{4\pi T} \left[-E_i \left(-\frac{1}{u} \right) \right]$$

* Elle s'obtient aisément par application de la transformation de Laplace, ce qui est une méthode de résolution très efficace pour de nombreux problèmes transitoires.

E_i est la fonction exponentielle intégrale, qui est connue et tabulée.

On trace dans la pratique la "courbe de Theis", ainsi qu'on l'appelle, en fonction du paramètre u :

$$h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$$

$W(u)$, fonction de Theis, est généralement tracée en coordonnées logarithmiques.

Cette fonction est représentée sur la Planche 6 hors texte, en même temps que les fonctions de Hantush. La courbe de Theis est la courbe enveloppe des courbes de Hantush.

La table ci-dessous (Wenzel, 1942) donne W en fonction de $1/u$:

1/u	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
x 1	0.219	0.049	0.013	0.0038	0.0011	0.00036	0.00012	0.000038	0.000012
x 10 ⁻¹	1.82	1.22	0.91	0.70	0.56	0.45	0.37	0.31	0.26
x 10 ⁻²	4.04	3.35	2.96	2.68	2.47	2.30	2.15	2.03	1.92
x 10 ⁻³	6.33	5.64	5.23	4.95	4.73	4.54	4.39	4.26	4.14
x 10 ⁻⁴	8.63	7.94	7.53	7.25	7.02	6.84	6.69	6.55	6.44
x 10 ⁻⁵	10.94	10.24	9.84	9.55	9.33	9.14	8.99	8.86	8.74
x 10 ⁻⁶	13.24	12.55	12.14	11.85	11.63	11.45	11.29	11.16	11.04
x 10 ⁻⁷	15.54	14.85	14.44	14.15	13.93	13.75	13.60	13.46	13.34
x 10 ⁻⁸	17.84	17.15	16.74	16.46	16.23	16.05	15.90	15.76	15.65
x 10 ⁻⁹	20.15	19.45	19.05	18.76	18.54	18.35	18.20	18.07	17.95
x 10 ⁻¹⁰	22.45	21.76	21.35	21.06	20.84	20.66	20.50	20.37	20.25
x 10 ⁻¹¹	24.75	24.06	23.65	23.36	23.14	22.96	22.81	22.67	22.55
x 10 ⁻¹²	27.05	26.36	25.96	25.67	25.44	25.26	25.11	24.97	24.86
x 10 ⁻¹³	29.36	28.66	28.26	27.97	27.75	27.56	27.41	27.28	27.16
x 10 ⁻¹⁴	31.66	30.97	30.56	30.27	30.05	29.87	29.71	29.58	29.46
x 10 ⁻¹⁵	33.96	33.27	32.86	32.58	32.35	32.17	32.02	31.88	31.76

Notez que si $Q \geq 0$, h croît avec u (ou avec t). C'est donc le cas où le débit Q est injecté. $Q < 0$ correspond au cas du débit pompé.

8.1.2. Approximation logarithmique de Jacob

Si t est grand, soit u grand:

$$-E_i\left(-\frac{1}{u}\right) \rightarrow \text{Log } u - \gamma$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma = 0,577, e^\gamma = 1,781$).

En pratique, dès que $u = \frac{4Tt}{r^2S} \geq 100$, on peut adopter l'approximation logarithmique de la formule de Theis, dite encore formule de Jacob:

$$h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log } \frac{4Tt}{e\gamma Sr^2} = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log } \frac{2,25Tt}{Sr^2}$$

Log: Népérien.

Sur un papier semi-log, la courbe d'évolution $h(t)$ en un point donné est une droite (cf. Pl.7).

Rappelons les *hypothèses de base des formules de Theis et de Jacob*:

- milieu infini, homogène et isotrope;
- transmissivité constante (nappe captive, ou avec approximation, nappe libre peu rabattue - S est alors remplacé par ω_d , la porosité de drainage);
- problème plan, c'est-à-dire charge constante dans la nappe sur une verticale (nappe captive ou hypothèse de Dupuit en nappe libre);
- forage captant la nappe sur toute son épaisseur* (pour que le problème reste plan), pompant à débit constant, avec rayon du forage négligeable;
- conditions initiales $h(t=0) = 0 \forall r$, c'est-à-dire nappe initialement immobile. Si ce n'est pas le cas, d'après le principe de superposition des écoulements, le rabattement $s = h_o - h$ vérifie les conditions initiales si h_o est un régime permanent.

Remarque: On peut calculer la variation de la charge au voisinage du puits pour t grand:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q}{4\Pi T} \frac{e^{-\frac{Sr^2}{4\Pi T t}}}{t} \approx \frac{Q}{4\Pi T} \frac{1}{t} \quad \text{si } r \text{ est petit}$$

Donc, $\frac{\partial h}{\partial t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$: la variation de charge devient très lente au voisinage du puits. Comme de plus, $\frac{\partial h}{\partial t}$ dépend peu de r , le profil de charge se déplace parallèlement à lui-même au voisinage du puits.

8.1.3. Relation avec le régime permanent

La formule de Dupuit donnant, en régime permanent, le rabattement dans un forage de rayon r_o est:

$$s_{r_o} = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log} \frac{R}{r_o}$$

R est le "rayon d'action" du puits, c'est-à-dire la zone à l'intérieur de laquelle l'influence du pompage se manifeste. Au-delà de R , le rabattement dû au forage est supposé nul.

Cette notion est souvent admise en pratique. Dans la plupart des cas, ce rayon d'action R est fictif, et la stabilisation des rabattements et l'obtention d'un régime permanent sont dues à l'influence d'une limite telle qu'une rivière à quelque distance, ou à un phénomène de drainance ou de recharge par la surface (voir plus loin § 8.3).

Cependant, dans une nappe non réalimentée par drainance ou par une limite, on peut exprimer ce "rayon d'action" du puits en fonction du temps de pompage, en appliquant l'approximation logarithmique de Jacob, au forage lui-même:

$$s_{r_o} = \frac{Q}{4\Pi T} \text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr_o^2} = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log} \frac{1,5\sqrt{Tt/S}}{r_o}$$

En comparant cette expression à la formule de Dupuit, on en tire:

$$R = 1,5\sqrt{Tt/S}$$

Si la nappe est infinie et non réalimentée, R varie donc comme \sqrt{t} . Si t est grand, R varie très lentement, et il semble que l'on obtienne un régime permanent.

De plus, à t donné, un profil piézométrique passant par le puits a bien une expression logarithmique (dès que l'on peut utiliser l'approximation de Jacob, c'est-à-dire pas trop loin du puits) comme le décrit la formule de Dupuit.

On parle alors de forage ou de puits "complet".

8.1.4. Application du principe de superposition

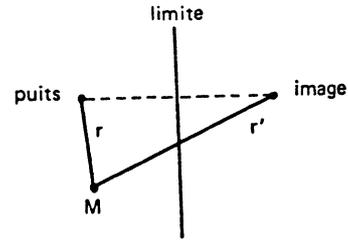
On peut, comme en régime permanent, utiliser le principe de superposition:

- soit pour calculer l'influence de plusieurs puits pompant dans une même nappe,
- soit pour représenter artificiellement l'influence d'une limite rectiligne (principe des images),
- soit pour étudier l'arrêt du pompage.

a) Limite rectiligne étanche (flux nul)

En rabattement: pompages de même signe au puits et dans le puits-image:

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left[W \left(\frac{4Tt}{Sr^2} \right) + W \left(\frac{4Tt}{Sr'^2} \right) \right]$$



Si l'on peut appliquer l'approximation logarithmique pour les deux fonctions W :

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left[\text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr^2} + \text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr'^2} \right]$$

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left[2 \text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr^2} + \text{Log} \frac{r^2}{r'^2} \right]$$

Si l'on trace l'évolution du rabattement s en fonction du logarithme du temps (papier semi-log) en un point M donné, la pente de la droite va doubler dès que l'on pourra utiliser l'approximation logarithmique (cf. Pl.7).

b) Limite rectiligne de réalimentation (potentiel constant)

- Pompage de signe opposé (injection) au puits-image:

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left[W \left(\frac{4Tt}{Sr^2} \right) - W \left(\frac{4Tt}{Sr'^2} \right) \right]$$

Si l'on peut utiliser l'approximation logarithmique pour les deux fonctions W :

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left[\text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr^2} - \text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr'^2} \right]$$

$$s = \frac{Q}{2\Pi T} \text{Log} \frac{r'}{r}$$

Le rabattement se stabilise et n'évolue plus avec le temps (cf. Pl.7). C'est bien souvent ainsi que s'obtient un régime permanent.

c) Arrêt de pompage

Pour calculer le comportement d'un forage que l'on arrête ("courbe de remontée"), on superpose par la pensée, au forage lui-même, une injection au même débit constant.

Soit t_o la durée du pompage, et t_1 le temps compté à partir de l'arrêt du pompage, le rabattement en tout point, à partir de l'arrêt du pompage, sera donné par:

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \left\{ W \left[\frac{4T(t_o + t_1)}{Sr^2} \right] - W \left(\frac{4Tt_1}{Sr^2} \right) \right\}$$

Trois cas peuvent se produire:

- il faut utiliser les fonctions W pour l'un ou les deux termes:

- on peut utiliser l'approximation de Jacob pour les deux:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left\{ \text{Log} \frac{2,25T(t_o + t_1)}{Sr^2} - \text{Log} \frac{2,25Tt_1}{Sr^2} \right\}$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log} \frac{t_o + t_1}{t_1} = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log} \left(1 + \frac{t_o}{t_1} \right)$$

On trace alors s en fonction du logarithme de $\left(1 + \frac{t_o}{t_1} \right)$.

- on peut supposer que la première fonction W est stabilisée (c'est-à-dire que le pompage a duré assez longtemps), donc que, pendant les premiers temps de la remontée au moins, le rabattement s ne varie que sous l'effet de la deuxième fonction W (ou de son approximation logarithmique). On traite ce terme seul comme un simple pompage.

Cette méthode est connue sous le nom de "Houpeurt-Pouchan".

8.2. INTERPRETATION D'UN ESSAI DE DEBIT

a) Méthode de Jacob

Un pompage à débit constant dans un puits permet de déterminer les paramètres T et S d'un aquifère, d'où l'emploi très fréquent des "essais de débits" pour étudier un aquifère.

A partir d'un état initial aussi stabilisé que possible, on met en route un pompage à débit constant dans un forage, et on observe les rabattements dans le forage lui-même, et si possible dans un certain nombre de piézomètres voisins. La cadence des mesures est très rapide initialement (toutes les minutes ou moins si possible) et se ralentit avec le temps. On interprétera, si possible, les mesures aux piézomètres; si l'on doit interpréter les mesures au puits de pompage, on utilisera plus volontiers les mesures de remontée à l'arrêt du pompage, qui ne donneront que T et pas S . Mais les mesures à la descente en pompage peuvent être faussées par "l'effet de skin" lié aux pertes de charge anormales au voisinage du forage; il est possible cependant d'en tenir compte.

Interpréter un essai de débit signifie dépouiller ces mesures, de façon graphique, pour en déduire T et S .

La *méthode de Jacob* consiste à reporter sur un graphique semilogarithmique le rabattement s en fonction du temps, à un point donné (puits ou piézomètre).

On peut également reporter s/Q en fonction de t/r^2 , si le débit du puits a un peu varié, ou si l'on veut porter tous les piézomètres sur le même graphique.

Dès que l'approximation logarithmique devient valable, les points doivent s'aligner sur une droite: dès que l'on a reconnu cette droite, l'interprétation est immédiate. Le problème est que le début de la courbe s'écarte de la droite de Jacob, et la fin peut également s'en écarter si la nappe n'est pas illimitée (cf. Pl.7 et § 8.1.4): on hésite parfois à choisir la "bonne" droite. La méthode de Theis, que nous verrons plus loin, permet de trancher les cas douteux.

Si donc on a choisi une droite, on prend deux points arbitraires A et B sur cette droite:

$$s_B - s_A = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log} \frac{t_B}{t_A} \quad \text{soit} \quad T = \frac{Q}{4\pi(s_B - s_A)} \text{Log} \frac{t_B}{t_A}$$

L'usage veut que l'on choisisse:

$$t_B = 10t_A$$

ce qui donne:

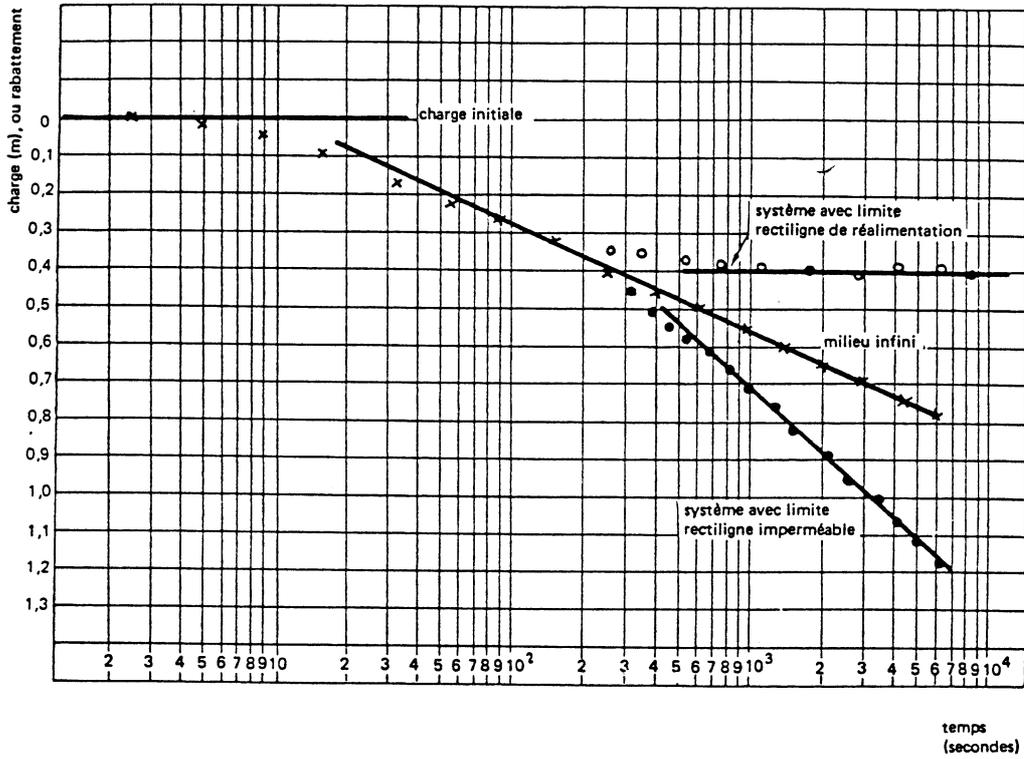
$$T = \frac{0,183Q}{s_B - s_A}$$

Pour calculer S , le coefficient d'emmagasinement, il suffit de remarquer que le point *fictif* C d'interception de la droite de Jacob avec l'axe $s = 0$ correspond à:

$$\text{Log} \frac{2,25Tt_C}{Sr^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2,25Tt_C}{Sr^2} = 1$$

d'où:

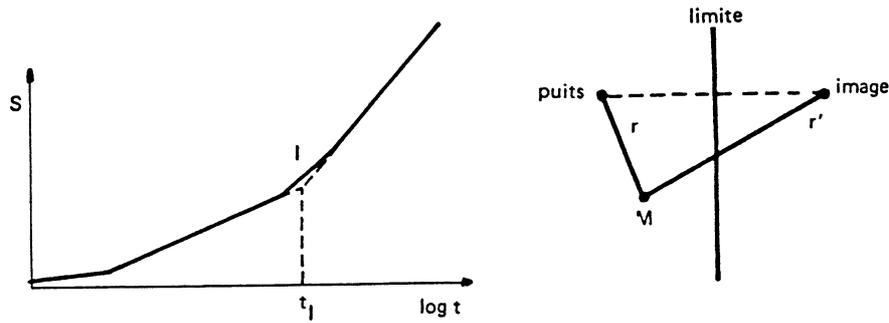
$$S = \frac{2,25Tt_C}{r^2}$$



Pl.7 - Evolution de la charge dans un piézomètre pendant un essai à débit constant

- Influence d'une limite:

Nous avons vu qu'une limite imperméable double la pente de la droite de Jacob:



Si l'on interprétait l'essai de débit avec la deuxième droite, on trouverait donc une transmissivité moitié (à tort).

On peut cependant préciser la distance de la limite. L'expression du rabattement est:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left\{ \text{Log} \left[\frac{2,25Tt}{Sr^2} \right] + \text{Log} \frac{2,25Tt}{Sr'^2} \right\}$$

Considérons le point d'intersection 1 (*fictif*) des deux droites. Par définition, c'est analytiquement en ce point que l'influence du pompage-image est nulle (même si on n'a le droit d'appliquer l'approximation logarithmique que bien plus tard). De la même façon que l'on avait calculé S en utilisant le point *fictif* C, on écrit ici:

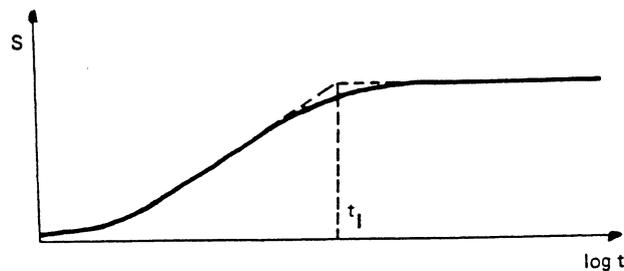
$$\text{Log} \frac{2,25Tt_I}{Sr'^2} = 0$$

soit:

$$r' = \sqrt{\frac{2,25Tt_I}{S}}$$

qui donne une idée de la distance de la limite. Avec deux piézomètres, par une petite construction géométrique simple, on peut même donner sa position exacte.

On procède exactement de même pour une limite de réalimentation:



$$r' = \sqrt{\frac{2,25Tt_I}{S}}$$

Notez que l'on peut aussi interpréter suivant la méthode de Jacob en portant en fonction de $\log r$, à une date t donnée, si l'on dispose de plusieurs piézomètres: $s = \frac{-Q}{2\pi T} \text{Log } r + \text{constante}$.

b) Interprétation avec la formule de Theis complète par la méthode d'identification

On utilise la fonction complète tabulée, valable même pour les temps petits:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W \left(\frac{4Tt}{Sr^2} \right)$$

On va utiliser un graphique logarithmique:

- pour la courbe standard (l'abaque Pl.6 hors texte):

$$W(u) \text{ en fonction de } u$$

- pour les mesures expérimentales s en fonction de t (ou éventuellement s/Q en fonction de t/r^2). Il faut utiliser un papier logarithmique transparent (calque) de même module que la courbe standard*

L'un des graphiques est tracé sur du calque pour pouvoir le poser sur l'autre. En effet:

en ordonnées:
$$\log s = \log \left[\frac{Q}{4\pi T} W \right] = \log \frac{Q}{4\pi T} + \log W$$

En graduation logarithmique des ordonnées, s se déduit de W par une translation unique $\left(\log \frac{Q}{4\pi T} \right)$

en abscisses: Un point d'abscisse u de la courbe standard représente en fait une valeur donnée de:

$$\frac{4Tt}{Sr^2} = u$$

Si u et t sont portés en graduations logarithmiques sur les abscisses, on a:

$$\log u = \log \frac{4Tt}{Sr^2} = \log t + \log \frac{4T}{Sr^2}$$

t se déduit de u par une translation unique également $\left(\log \frac{4T}{Sr^2} \right)$

En conséquence, avec du papier bilogarithmique, la courbe standard et la courbe expérimentale doivent pouvoir être superposées par simple translation, dans le sens des deux axes, d'une feuille de papier sur l'autre (voir Pl.8), en conservant toutefois le parallélisme des axes. Ayant trouvé le point de superposition des deux graphiques, l'identification est alors immédiate. On prend un point quelconque M du plan, pas nécessairement sur l'une quelconque des courbes, et on exprime ses coordonnées suivant les deux systèmes:

$$M = \begin{cases} s_o \\ t_o \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_o \\ u_o \end{cases}$$

Par définition on peut écrire:

$$\begin{cases} s_o = \frac{Q}{4\pi T} W_o \\ u_o = \frac{4T t_o}{S r^2} \end{cases} \quad \text{d'où l'on tire:}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{Q}{4\pi} \frac{W_o}{s_o} \\ S &= \frac{4}{r^2} \frac{T t_o}{u_o} \end{aligned}$$

Cependant, l'influence d'une limite est moins aisée à interpréter dans ce système que dans celui de Jacob. Son seul avantage est qu'il n'est pas nécessaire d'éliminer les premiers points de mesure et que, pour des essais de courte durée, on a donc moins d'ambiguïté que lorsque l'on recherche une droite sur le graphique de Jacob.

L'une et l'autre méthodes peuvent donner tout au plus deux chiffres significatifs aux paramètres T et S , jamais trois.

* Si l'on utilise l'abaque de la Pl.6 comme courbe standard, le papier calque correspondant doit avoir un module de 62,5×62,5 mm. C'est le module standard pour l'interprétation des sondages électriques, en géophysique. Un tel calque bilogarithmique est fabriqué en France par la Cie Française des Diagrammes (blocs "précis") sous la référence 2101.

c) Interprétation des courbes de remontée

Ainsi que nous l'avons vu au § 8.1.3.c., il existe deux méthodes d'interprétation d'une courbe de remontée:

- La méthode de Houpeurt-Pouchan: on suppose que le pompage a duré assez longtemps pour que l'on puisse - au moins au début de la remontée - penser qu'un régime permanent avait été atteint avant l'arrêt.

On interprète alors la courbe de remontée comme une courbe de descente, par la méthode de Jacob ou celle de Theis.

- La méthode en $\log \left(1 + \frac{tp}{t}\right)$: on trace s en fonction de $\log \left(1 + \frac{tp}{t}\right)$ ($tp =$ durée du pompage, $t =$ temps compté après l'arrêt du pompage) sur un diagramme semi-log: la pente de la droite que l'on doit obtenir permet de calculer la transmissivité, selon la méthode de Jacob (§ 8.2.a.), mais pas le coefficient d'emmagasinement.

L'intérêt des courbes de remontée est particulièrement grand pour les essais de débits où l'on ne dispose pas de piézomètres, le seul point d'observation de la nappe étant le forage lui-même.

En effet, à la descente, le niveau dans le forage est perturbé par les pertes de charge (termes quadratiques) qui apparaissent à la traversée des fentes de la crépine du puits, et même dans les premiers décimètres de terrain entourant le puits. De la sorte, en pompage, le niveau dynamique dans le puits représente mal la charge dans la nappe au voisinage du puits. Tandis que, pendant la remontée, tous ces phénomènes sont annulés, et l'on observe véritablement le niveau de la nappe dans le puits, ce qui permet une bonne interprétation

Notons que souvent dans le puits, le niveau oscille légèrement à cause des instabilités de régime de la pompe: la mesure dans le forage au cours du pompage n'est pas précise. Notons également qu'au forage, le rayon r du puits est mal défini: on connaît bien sûr celui du forage lui-même, celui de la crépine, ... , mais le terrain lui-même au voisinage du forage a été remanié au cours du développement du puits. On admet qu'il existe, au forage, un "rayon efficace" r' du forage, à prendre en compte pour les interprétations du niveau forage, et qui est légèrement supérieur au rayon réel r du trou.

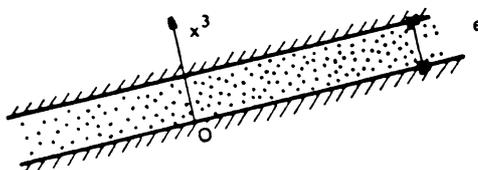
8.3. DRAINANCE

8.3.1. Intégration de l'équation de diffusivité en tenant compte des épontes

Reprenons l'équation de la diffusivité complète (nappe captive):

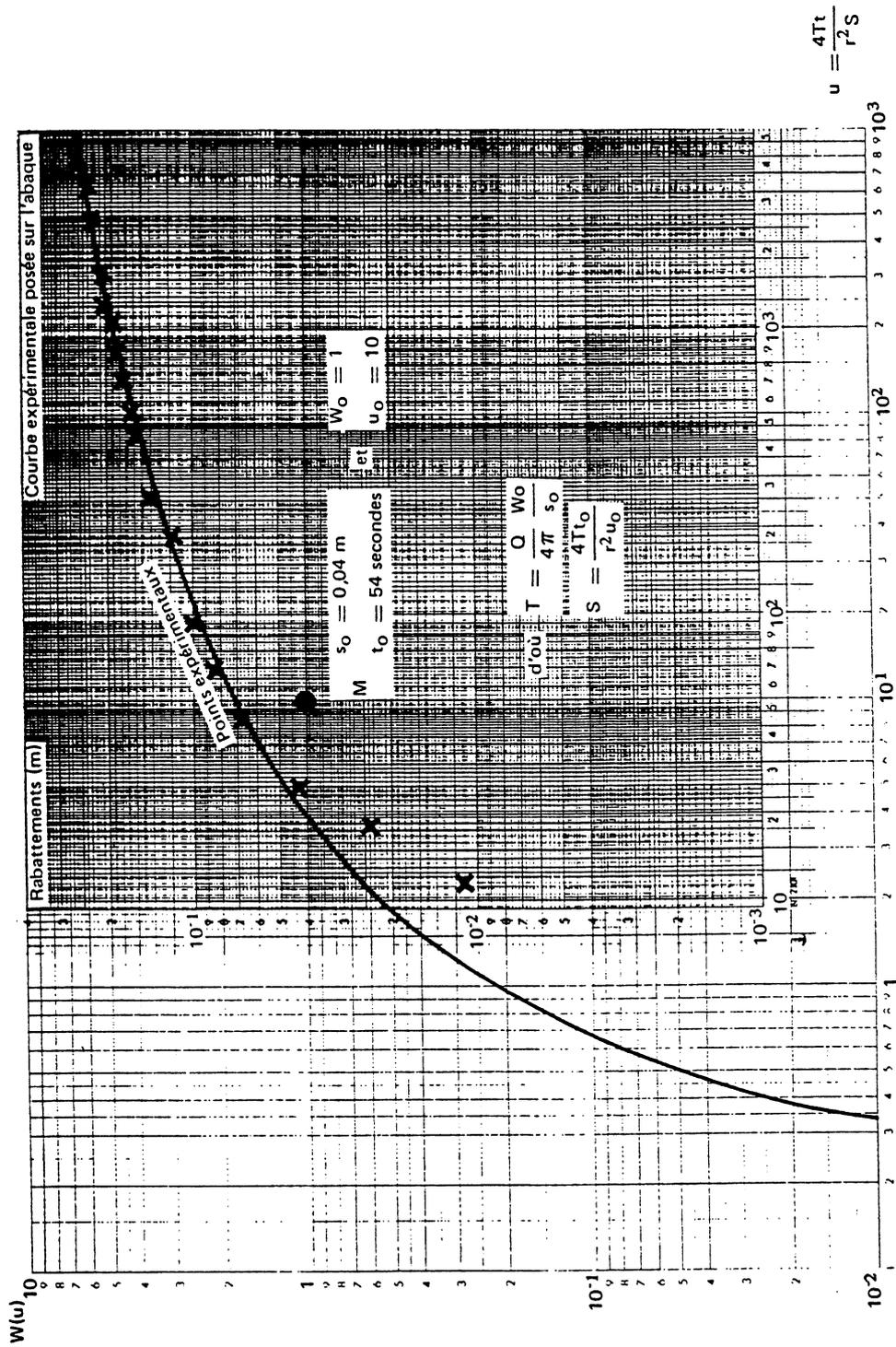
$$\operatorname{div} (\overline{K} \overrightarrow{\operatorname{grad}} h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

Considérons une nappe captive confinée par deux épontes: nous ne supposons pas celles-ci nécessairement horizontales, ni totalement imperméables.



Nous allons chercher à intégrer sans approximations l'équation de la diffusivité suivant la direction perpendiculaire aux épontes: nous allons devoir faire les hypothèses suivantes:

- Les épontes sont planes et parallèles, la puissance de la nappe étant e .
- Une des directions principales d'anisotropie est normale aux épontes (x_3 sur la figure). Nous allons nous ramener à un problème plan suivant les deux autres directions principales d'anisotropie, x_1 et x_2 , appartenant à la direction du plan des épontes.
- Nous supposons que le *gradient de charge* dans le plan x_1, x_2 n'est pas fonction de x_3 :



Pl.8 - Essais de débits - Identification par la méthode de Theis

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

- iv) Nous supposons enfin que la variation de charge dans l'unité de temps, $\frac{\partial h}{\partial t}$, n'est pas fonction de x_3 . Autrement dit, la charge peut varier avec x_3 entre le mur et le toit de la nappe, mais à chaque instant le *gradient de charge* et la *variation de charge* sont les mêmes en tout point de la nappe sur une même transversale $0x_3$. Avec ces hypothèses, l'intégration est aisée:

$$\int_0^e \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[K_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[K_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[K_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} \right] \right\} dx_3 = \int_0^e S_s \frac{\partial h}{\partial t} dx_3$$

Pour le premier membre, on sait que (règle de Leibnitz):

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{a(u)}^{b(u)} F(u, v) dv = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) dv + \frac{\partial b}{\partial u} F(u, b(u)) - \frac{\partial a}{\partial u} F(u, a(u))$$

Ici, d'après l'hypothèse i), les troisième et quatrième termes sont nuls. On peut écrire:

1^{er} membre:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_0^e K_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_3 \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\int_0^e K_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_3 \right] + \int_0^e \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} \right) dx_3$$

D'après iii), on peut sortir $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ des deux premières intégrales. On fait alors apparaître la transmissivité de la nappe:

$$T_1 = \int_0^e K_1 dx_3 \quad , \quad T_2 = \int_0^e K_2 dx_3$$

La troisième intégrale s'intègre immédiatement et donne:

$$\left(K_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} \right)_{x_3=e} - \left(K_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} \right)_{x_3=0}$$

D'après la loi de Darcy, on peut interpréter ceci en termes de flux: c'est le débit par unité de surface entrant dans la nappe par le toit et le mur de la nappe respectivement: si on oriente la normale aux épontes vers l'intérieur, ces termes sont $F = - \left(K \frac{\partial h}{\partial n} \right)$ mur et toit.

On appelle *flux de drainance* ces flux échangés entre la nappe captive et ses épontes. Nous les noterons F_h et F_b (haut et bas) et les ferons figurer au deuxième membre, en les supposant positifs s'ils sont entrants.

Pour ce deuxième membre, le $\frac{\partial h}{\partial t}$ sort de l'intégrale, d'après iv) et on retrouve le coefficient d'emménagement:

$$S = \int_0^e S_s dx_3 = \rho \omega g e \left(\beta_1 - \beta_5 + \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

Il vient en définitive:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(T_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - (F_h + F_b)$$

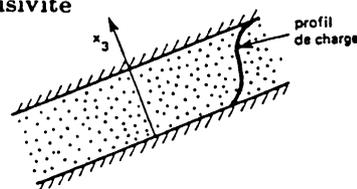
Si l'on donne F_h et F_b , on peut chercher à intégrer cette équation et calculer h . On obtiendra, par exemple, une solution de la forme:

$$h = h(x_1, x_2, t)$$

La solution générale en fonction de s s'écrit, d'après les hypothèses iii) et iv):

$$h = h(x_1, x_2, t) + f(x_3)$$

où $f(x_3)$ est une fonction indépendante de x_1, x_2 et t . Autrement dit, le profil de charge en un point en fonction de x_3 n'est pas précisé, mais est le même en tout point et pour toute date: il suffit de le connaître en un point pour le connaître partout.



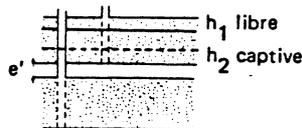
On ne s'intéresse en général pas à ce profil et on fait l'hypothèse que h varie peu avec x_3 .

Notons au passage que si $F_h = F_b = 0$, nous avons montré que l'équation de la diffusivité habituelle à deux dimensions ne suppose pas la nappe horizontale: seulement les épontes parallèles et le forage perpendiculaire à celles-ci.

8.3.2. Solutions analytiques radiales du problème de la drainance

Il existe deux solutions radiales classiques, celles de Hantush et de Boulton.

a) **Hantush** suppose que la nappe captive est réalimentée à partir d'une nappe libre sus-jacente qui percole à travers le semi-perméable qui les sépare.



Le flux de drainance F_h^o , en régime permanent, est donné suivant la loi de Darcy, par le gradient de charge entre les deux nappes s'appliquant à la traversée de la couche semi-perméable:

$$F_h^o = -K' \frac{h_2^o - h_1^o}{e'} \quad (8.3.2.1)$$

avec: K' : perméabilité du semi-perméable,
 e' : épaisseur du semi-perméable,
 h_2 : charge dans la nappe captive,
 h_1 : charge dans la nappe libre,
 o : signifie "régime permanent".

Hantush s'intéresse à la réaction d'un tel système quand on met en route un pompage à débit constant dans la nappe captive. Il faut alors deux hypothèses:

- la charge h_1 dans la nappe libre ne va pas varier même si le débit de drainance F_h augmente. Ceci est valable si la nappe libre est bien réalimentée (par la pluie par exemple), ou encore si la durée du pompage n'est pas trop longue;
- l'augmentation du débit de drainance est supposée être instantanée et toujours donnée par la loi de Darcy: si nous notons s le rabattement dans la nappe captive:

$$F_h = -K' \frac{(h_s^o - s) - h_1^o}{e'} \quad (8.3.2.2)$$

Ceci néglige l'établissement d'un régime transitoire dans le semi-perméable. Soit:

$$F_h = F_h^o + \frac{K'}{e'} s \quad (8.3.2.3)$$

Si le régime permanent initial h_2^o vérifie l'équation $\nabla^2 h_2^o = -\frac{F_h^o}{T}$, le rabattement s vérifie donc l'équation de la diffusivité suivante:

$$\nabla^2 s = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{K'}{Te'} \quad (8.3.2.4)$$

On définit le "facteur de drainance de Hantush" $B = \sqrt{\frac{Te'}{K'}}$ dont la dimension est celle d'une longueur. La solution radiale de Hantush s'écrit:

$$s = \frac{Q}{4\Pi T} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau - \frac{r^2}{4B^2\tau}}}{r^2 S} d\tau = \frac{Q}{4\Pi T} W' \left(\frac{4Tt}{r^2 S}, \frac{r}{B} \right)$$

Cette solution se présente sous la forme suivante, en fonction de deux paramètres:

$$u = \frac{4Tt}{r^2 S} \quad \text{et} \quad \frac{r}{B}$$

- la courbe enveloppe est la courbe de Theis (correspondant à $\frac{r}{B}$ négligeable);
- pour un paramètre $\frac{r}{B}$ donné (c'est-à-dire pour une perméabilité K' du semi-perméable donné et une distance r du forage donné), la courbe d'évolution se stabilise avec le temps: on aboutit à un régime permanent. Ci-joint une table de la fonction W' , d'après Walton (1970). Elle est reportée sur l'abaque de la Pl.6 hors texte.

Ceci nous explique pourquoi l'on obtient, dans certains cas, une stabilisation d'un essai de débit qui correspond à un phénomène de drainance et que l'on peut interpréter à tort comme l'obtention d'un régime permanent grâce à l'existence d'un "rayon d'action" fictif R du forage (cf. 7.3.a, formule de Dupuit).

Cette stabilisation du rabattement dans les piézomètres voisins du forage au bout d'un certain temps, se produit au même instant pour tous les forages à la même distance du puits: ceci ne serait pas le cas pour une stabilisation due à une limite de réalimentation (rivière), les piézomètres les plus proches du forage-image fictif se stabilisant les premiers. Pour identifier ce type de drainance, il faut utiliser une abaque de Hantush (Pl.6 hors-texte) et l'on procède comme au § 8.2.b. ci-dessus, avec la courbe de Theis, mais en recherchant quelle est la meilleure courbe de l'abaque de Hantush qui permette la superposition, ce qui donne r/B .

Neuman et Witherspoon (1969, 1972) ont montré cependant que cette solution, qui néglige l'emmagasinement dans les épontes, peut parfois conduire à des erreurs importantes. Ils proposent d'autres méthodes d'interprétation, qui tiennent compte de cet emmagasinement, et également de la variation de charge dans l'aquifère sus-jacent.

Il faut voir que la mise en évidence d'un phénomène de drainance lors d'un essai de débit n'implique rien sur le sens des échanges: la drainance peut provenir d'un aquifère sus-jacent ou sous-jacent, et peut être, en régime permanent, (avant le début du pompage) une alimentation ou un prélèvement sur l'aquifère étudié: le flux F_h^o de l'expression (8.3.2.1) est algébrique, et les expressions (8.3.2.2 à 4) restent valables quel que soit son signe.

b) Boulton fait une autre hypothèse sur le flux de drainance engendré par le rabattement s : il suppose qu'une augmentation de rabattement Δs à l'instant t génère un flux de drainance Δq par unité de surface qui diminue exponentiellement avec le temps:

$$\Delta q(\tau) = S' f e^{-f(\tau-t)} \Delta s \quad f : \text{paramètre, } [T^{-1}]$$

L'intégrale de ce flux entre t et l'infini est:

$$q = \int_t^\infty S' f e^{-f(\tau-t)} \Delta s d\tau$$

$$q = S' \Delta s$$

S' est le coefficient d'emmagasinement de la nappe sus-jacente (ou sous-jacente) qui réalimente la nappe captive par drainance, puisqu'un rabattement Δs génère un flux cumulé $S' \Delta s$.

Mais ce flux n'est pas instantané: la solution proposée correspond à un tarissement exponentiel en fonction du temps de cet apport de drainance.

Table des valeurs de $W(\frac{r^2 S}{r^2 S}, r/B)$
d'après Hantush (1956) et Walton (1970)

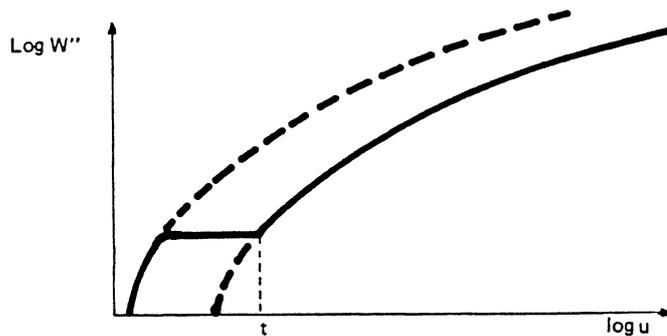
$\frac{r^2 S}{r^2}$	r/B	0.01	0.015	0.03	0.05	0.075	0.10	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5
0.000001																				
0.000005	9.4413																			
0.00001	9.4176	8.6313																		
0.00005	8.8827	8.4533	7.2450																	
0.0001	8.3983	8.1414	7.2122	6.2282	5.4228															
0.0005	6.9750	6.9152	6.6219	6.0821	5.4062	4.8530														
0.01	6.3089	6.2765	6.1202	5.7965	5.3078	4.8292	4.0696	4.0596	3.5054											
0.05	4.7212	4.7152	4.6829	4.6084	4.4713	4.2980	3.8821	3.8821	3.4567	2.7428	2.2290	1.8486	1.5550	1.3210	1.1307					
0.1	4.0356	4.0326	4.0167	3.9796	3.9091	3.8150	3.5725	3.5725	3.2875	2.7104	2.2263	1.7075	1.4927	1.2965	1.1210	0.9700	0.8409			
0.5	2.4675	2.4670	2.4642	2.4576	2.4448	2.4271	2.3776	2.3776	1.7527	1.6704	1.5644	1.4422	1.3115	1.1791	1.0506	0.9257	0.8190	0.4271	0.2278	
1.0	1.8227	1.8225	1.8213	1.8184	1.8128	1.8060	1.7829	1.7829	1.5561	1.5453	1.5344	1.5206	1.5044	1.4860	1.4658	1.4440	1.4210	0.3007	0.1944	0.1174
5.0	0.5598	0.5597	0.5596	0.5594	0.5588	0.5581	0.5561	0.5561	0.5532	0.5453	0.5344	0.5206	0.5044	0.4920	0.4860	0.4855	0.4855	0.1509	0.1139	0.0803
	0.2194	0.2194	0.2193	0.2193	0.2191	0.2190	0.2186	0.2186	0.2179	0.2161	0.2135	0.2103	0.2065	0.2020	0.1970	0.1914	0.1855	0.0010	0.0010	0.0009
	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0009

L'équation de diffusivité s'obtient en calculant à chaque instant le flux de drainance F_h par convolution, c'est-à-dire par sommation des flux élémentaires produits par les rabattements engendrés depuis le début du pompage:

$$\nabla^2 s = \frac{S}{T} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{S'}{T} \int_0^t f e^{-f(t-\tau)} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\tau} d\tau$$

Boulton donne une solution radiale de cette équation qui se présente de la façon suivante, pour r petit:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W''(u, S', f) \quad \text{où} \quad u = \frac{4Tt}{r^2 S}$$



L'évolution du rabattement se présente initialement conformément à la solution de Theis, correspondant au couple de paramètres (T, S) . Ensuite vient un palier qui permet d'identifier éventuellement f , enfin le rabattement se présente encore comme une nouvelle fonction de Theis, mais décalée par rapport à la première d'une translation parallèle à l'axe $\log u$ (pas de translation verticale) et correspondant au jeu de paramètres $(T, S + S')$.

Ce type de drainance est donc facile à reconnaître et à identifier avec une courbe de Theis, et permet de calculer S'' .

Si l'on appelle t le temps où le palier de rabattement intercepte la deuxième courbe de base (figure ci-dessus), Berkaloff a montré que:

$$f = \frac{0,561}{t}$$

Ce type de comportement se rencontre assez fréquemment en nappe libre, l'écoulement retardé étant simplement dû à l'égouttage du milieu non saturé quand on rabat la surface libre (voir § 6.2.a).

8.4. CORRECTIONS PARTICULIERES A APPORTER A UN ESSAI DE DEBIT

L'interprétation des essais de débit, très utile en hydrogéologie car c'est l'un des moyens les plus utilisés pour mesurer "in situ" la valeur des paramètres T et S , constitue une science en soi. Il existe des ouvrages entiers qui lui sont consacrés: cf. "Interprétation et discussion des pompages d'essais", G.P. Kruseman et N.A. Ridder, Bulletin n°11/F - International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, Pays-Bas, 1970.

Nous donnons ci-dessous des exemples particulièrement importants:

a) Effet de capacité du puits

Au début du pompage, si le débit de la pompe est Q , le débit retiré à la formation n'est pas Q , car on commence à vider le puits. Papadopoulos et Cooper (1976) ont donné la solution suivante à ce problème, en nappe captive:

$$s_p = \frac{Q}{4\pi T} F(u_p, \alpha)$$

$$\text{avec } F(u_p, \alpha) = \frac{32\alpha^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\beta^2/4u_p}}{\beta^3 \Delta(\beta)} d\beta$$

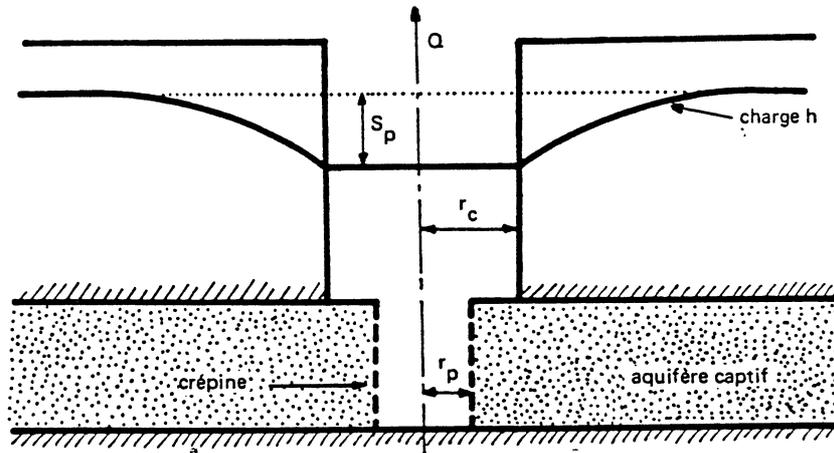
$$\left\{ \begin{array}{l} s_p = \text{rabattement au puits} \\ u_p = \frac{r_p^2 S}{4Tt} \\ r_p = \text{rayon du puits au niveau du captage} \\ \alpha = \frac{n_p S}{r_c^2} \\ r_c = \text{rayon du puits au niveau du tubage} \\ Q = \text{débit du puits} \\ S = \text{coefficient d'emmagasinement} \\ T = \text{transmissivité} \end{array} \right.$$

$$\Delta(\beta) = [\beta J_0(\beta) - 2\alpha J_1(\beta)]^2 + [\beta Y_0(\beta) - 2\alpha Y_1(\beta)]^2$$

J_n = fonction de Bessel de 1^o ordre n

Y_n = fonction de Bessel de 2^o ordre n

La différence entre r_p et r_c est explicitée dans le schéma suivant:



Cette solution est particulièrement utile pour des essais de débits dans des puits artisanaux de gros diamètres, très fréquents dans les pays en voie de développement. La fonction $F(u_p, \alpha)$ est donnée par la table et l'abaque suivantes, extraites de Papadopoulos et Cooper. Notez que l'axe des abscisses est gradué en u_p , non en $\frac{1}{u_p}$. Notez enfin que l'expression du rabattement dans un piézomètre à quelque distance du puits a été donnée par Carslaw et Jaeger.

b) Essais artésiens

Dans un forage artésien, quand on ouvre la tête du puits, le débit jaillit naturellement et décroît avec le temps. Au lieu d'imposer un débit constant, on impose un rabattement constant ($h = z$ à la tête du puits). Jacob et Lohman (1952) ont donné l'expression du débit jaillissant en fonction du temps:

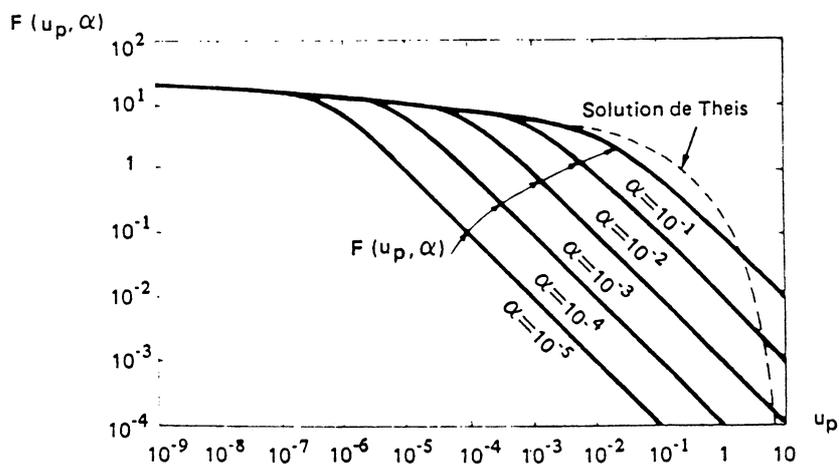
$$Q = 2\pi T(h_o - h)G(\alpha)$$

où Q est le débit jaillissant,
 T la transmissivité,

$h_o - h$ est le rabattement imposé (charge dans la nappe avant l'essai moins charge imposée à l'ouverture par la cote de la tête du forage); si le forage est très profond, il faut tenir

Table des valeurs de la fonction $F(u_p, \alpha)$

u_p	α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
10		9.755×10^{-3}	9.976×10^{-4}	9.998×10^{-5}	1.000×10^{-5}	1.000×10^{-6}
1		9.192×10^{-2}	9.914×10^{-3}	9.991×10^{-4}	1.000×10^{-4}	1.000×10^{-5}
5×10^{-1}		1.768×10^{-1}	1.974×10^{-2}	1.997×10^{-3}	2.000	2.000
2		4.062	4.890	4.989	4.999	5.000
1		7.336	9.665	9.966	9.997	1.000×10^{-4}
5×10^{-2}		1.260×10^0	1.896×10^{-1}	1.989×10^{-2}	1.999×10^{-3}	2.000
2		2.303	4.529	4.949	4.995	5.000
1		3.276	8.520	9.834	9.984	1.000×10^{-3}
5×10^{-3}		4.255	1.540×10^0	1.945×10^{-1}	1.994×10^{-2}	2.000
2		5.420	3.043	4.725	4.972	4.998
1		6.212	4.545	9.069	9.901	9.992
5×10^{-4}		6.960	6.031	1.688×10^0	1.965×10^{-1}	1.997×10^{-2}
2		7.886	7.557	3.523	4.814	4.982
1		8.572	8.443	5.526	9.340	9.932
5×10^{-5}		9.318	9.229	7.631	1.768×10^0	1.975×10^{-1}
2		1.024×10^1	1.020×10^1	9.676	3.828	4.861
1		1.093	1.087	1.068×10^1	6.245	9.493
5×10^{-6}		1.163	1.162	1.150	8.991	1.817×10^0
2		1.255	1.254	1.249	1.174×10^1	4.033
1		1.324	1.324	1.321	1.291	6.779
5×10^{-7}		1.393	1.393	1.392	1.378	1.023×10^1
2		1.485	1.485	1.484	1.479	1.371
1		1.554	1.554	1.554	1.551	1.513
5×10^{-8}		1.623	1.623	1.623	1.622	1.605
2		1.705	1.705	1.705	1.714	1.708
1		1.784	1.784	1.784	1.784	1.781
5×10^{-9}		1.854	1.854	1.854	1.854	1.851
2		1.945	1.945	1.945	1.945	1.940
1		20.15	2.015	2.015	2.015	2.015



compte des pertes de charge dans le tubage, car la charge h qui nous intéresse est celle au droit de la formation.

$$\alpha = \frac{Tt}{r_p^2 S}$$

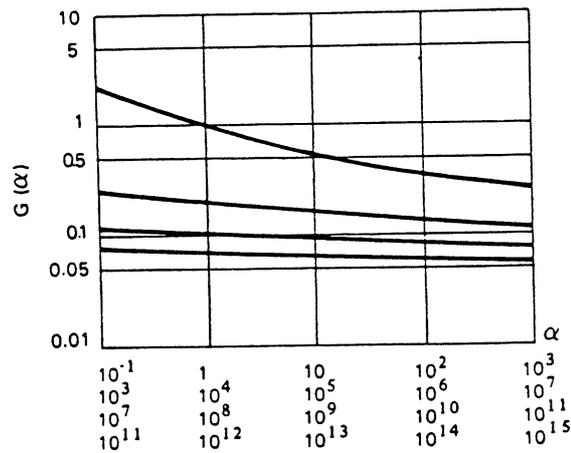
où S est le coefficient d'emmagasinement,
 r_p est le rayon du forage.

$$G(\alpha) = \frac{4\alpha}{\Pi} \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} \left\{ \frac{\Pi}{2} + \text{Arctg} [Y_0(x)/J_0(x)] \right\} dx$$

J, Y fonctions de Bessel d'ordre zéro et de 1^{ère} et 2^{ème} espèce, respectivement.

La table de fonction G et l'abaque correspondante sont extraites de Jacob et Lohman.

α	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3
1	56.9	18.34	6.13	2.249	0.985	0.534	0.346	0.251
2	40.4	13.11	4.47	1.716	0.803	0.461	0.311	0.232
3	33.1	10.79	3.74	1.477	0.719	0.427	0.294	0.222
4	28.7	9.41	3.30	1.333	0.667	0.405	0.283	0.215
5	25.7	8.47	3.00	1.234	0.630	0.389	0.274	0.210
6	23.5	7.77	2.78	1.160	0.602	0.377	0.268	0.206
7	21.8	7.23	2.60	1.103	0.580	0.367	0.263	0.203
8	20.4	6.79	2.46	1.057	0.562	0.359	0.258	0.200
9	19.3	6.43	2.35	1.018	0.547	0.352	0.254	0.198
10	18.3	6.13	2.25	0.985	0.534	0.346	0.251	0.196
α	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}
1	0.1964	0.1608	0.1360	0.1177	0.1037	0.0927	0.0838	0.0764
2	0.1841	0.1524	0.1299	0.1131	0.1002	0.0899	0.0814	0.0744
3	0.1777	0.1479	0.1266	0.1106	0.0982	0.0883	0.0801	0.0733
4	0.1733	0.1449	0.1244	0.1089	0.0968	0.0872	0.0792	0.0726
5	0.1701	0.1426	0.1227	0.1076	0.0958	0.0864	0.0785	0.0720
6	0.1675	0.1408	0.1213	0.1066	0.0950	0.0857	0.0779	0.0716
7	0.1654	0.1393	0.1202	0.1057	0.0943	0.0851	0.0774	0.0712
8	0.1636	0.1380	0.1192	0.1049	0.0937	0.0846	0.0770	0.0709
9	0.1621	0.1369	0.1184	0.1043	0.0932	0.0842	0.0767	0.0706
10	0.1608	0.1360	0.1177	0.1037	0.0927	0.0838	0.0764	0.0704



c) Nappe libre, aquifère anisotrope, puits incomplets, tenant compte du retard dans le drainage gravitaire de la zone non saturée.

Neuman (1972, 1973, 1974, 1975) a étudié ce problème. Rappelons qu'un puits incomplet signifie que le fond du puits n'atteint pas le substratum de la nappe. L'anisotropie s'entend pour la perméabilité verticale/horizontale.

Si le puits est complet et crépiné sur toute sa hauteur, le rabattement dans un piézomètre crépiné également sur toute sa hauteur est donné par:

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\Pi T} \int_0^\infty 4y J_0(y\beta^{1/2}) \left[u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \right] dy$$

avec
$$u_0(y) = \frac{\{1 - \exp[-t_s \beta (y^2 - \gamma_0^2)]\} \tanh(\gamma_0)}{\{y^2 + (1 + \sigma)\gamma_0^2 - (y^2 - \gamma_0^2)^{2/\sigma}\} \gamma_0}$$

$$u_n(y) = \frac{\{1 - \exp[-t_s \beta (y^2 + \gamma_n^2)]\} \tan(\gamma_n)}{\{y^2 - (1 + \sigma)\gamma_n^2 - (y^2 + \gamma_n^2)^{2/\sigma}\} \gamma_n}$$

où: γ_0 et γ_n sont les racines de:

$$\begin{aligned} \sigma \gamma_0 \operatorname{Sin} h(\gamma_0) - (y^2 - \gamma_0^2) \operatorname{Cos} h(\gamma_0) &= 0, & \gamma_0^2 < y^2 \\ \sigma \gamma_n \operatorname{Sin}(\gamma_n) + (y^2 + \gamma_n^2) \operatorname{Cos}(\gamma_n) &= 0 \\ \text{avec } (2n - 1)(\Pi/2) < \gamma_n < n\Pi & n \geq 1 \end{aligned}$$

avec r = distance du piézomètre au puits,

Q = débit du puits, constant

T = transmissivité

J_0 = fonction de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre zéro

$t_s = \frac{Tt}{Sr^2}$ temps réduit "élastique"

S = coefficient d'emmagasinement de la formation. En effet, la transmission des pressions dans l'aquifère se fait par son élasticité, comme en nappe captive, jusqu'à la surface libre où entre en jeu le drainage. D'où la notion de drainage retardé.

$$t_y = \frac{Tt}{\omega_d r^2} \text{ temps réduit "drainage"}$$

ω_d = porosité de drainage de la formation

$$\sigma = \frac{S}{\omega_d} = \frac{t_y}{t_s}$$

$$\beta = \frac{K_z r^2}{K_r e^2}$$

K_z, K_r perméabilité anisotrope dans les directions z et r

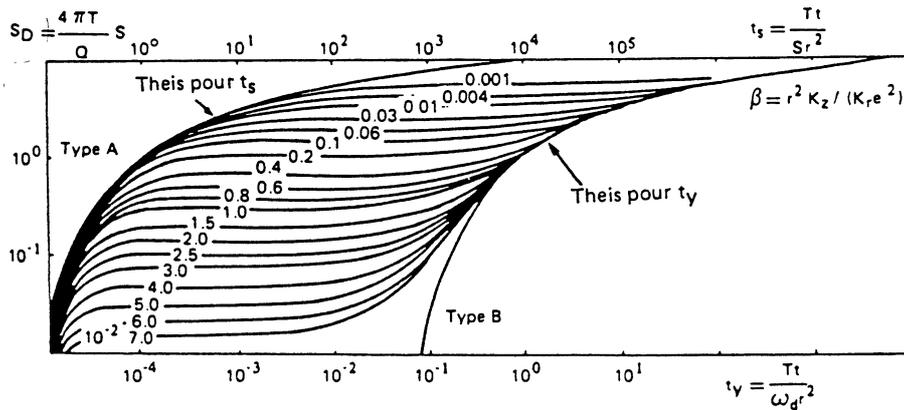
e = épaisseur initiale saturée de l'aquifère.

Cette fonction est tabulée, et représentée sur l'abaque ci-dessus (Neuman, 1975). Les courbes sont représentées pour σ proche de zéro; on obtient ainsi deux familles de courbes (type A et type B), qui se raccordent par un palier. La longueur de ce palier est directement fonction de la valeur de σ . Pour éviter d'introduire ce paramètre dans les abaques, on représente les courbes A en fonction du temps réduit t_s (échelle supérieure) et les B en fonction de t_y (échelle inférieure).

L'interprétation se conduit, en bilog, de la façon suivante:

- i) on cale la fin de l'essai sur les courbes de type B par la même méthode que pour la courbe de Theis; on en déduit β, T et ω_d ;
- ii) on cale ensuite le débit de l'essai, sans translation verticale des courbes, de façon à garder les mêmes T et β ; on calcule alors S sur les courbes de type A;
- iii) à partir de T , on calcule $K_r = T/e$, et grâce à β , on peut calculer K_z . C'est ainsi une des rares méthodes qui permettent d'estimer l'anisotropie de la formation.

La solution ci-dessus est cependant une solution approchée obtenue par linéarisation. Elle ne tient par exemple pas compte de la diminution de l'épaisseur mouillée avec le temps. Elle peut également être calculée pour tout piézomètre ouvert à une cote z donnée, et non ouvert sur toute sa hauteur.



Pour le cas de la pénétration partielle, une autre fonction est proposée. Cependant, le nombre de paramètres devient trop élevé pour pouvoir construire des abaques: un programme de calcul de l'abaque correspondant à une géométrie donnée (profondeur du puits, épaisseur de la nappe, position et ouverture des piézomètres) est disponible auprès de l'auteur (Prof. Neuman, Dept of Hydrology, the Univ. of Arizona, Tucson, AZ 85721 USA) ou à l'Ecole des Mines, Fontainebleau. Le temps de calcul de l'abaque peut cependant être parfois élevé.

d) Variation du débit au cours de l'essai

Toutes les solutions présentées sont linéaires en Q . Si le débit varie au cours du temps, la réponse s'obtient par application du principe de superposition, par convolution de la solution élémentaire avec la variation de débit. Par exemple, pour la solution de Theis:

Table de la fonction "nappe libre" de Neuman

t_s	$\beta = 0.001$	$\beta = 0.004$	$\beta = 0.01$	$\beta = 0.03$	$\beta = 0.06$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 0.8$	$\beta = 1.0$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.0$	$\beta = 2.5$	$\beta = 3.0$	$\beta = 4.0$	$\beta = 5.0$	$\beta = 6.0$	$\beta = 7.0$
1×10^{-1}	2.48×10^{-2}	2.43×10^{-2}	2.41×10^{-2}	2.35×10^{-2}	2.30×10^{-2}	2.24×10^{-2}	2.14×10^{-2}	1.99×10^{-2}	1.88×10^{-2}	1.79×10^{-2}	1.70×10^{-2}	1.53×10^{-2}	1.38×10^{-2}	1.25×10^{-2}	1.13×10^{-2}	9.33×10^{-3}	7.72×10^{-3}	6.39×10^{-3}	5.30×10^{-3}
2×10^{-1}	1.45×10^{-1}	1.42×10^{-1}	1.40×10^{-1}	1.36×10^{-1}	1.31×10^{-1}	1.27×10^{-1}	1.19×10^{-1}	1.08×10^{-1}	9.88×10^{-2}	9.15×10^{-2}	8.49×10^{-2}	7.13×10^{-2}	6.03×10^{-2}	5.11×10^{-2}	4.35×10^{-2}	3.71×10^{-2}	3.14×10^{-2}	2.74×10^{-2}	2.31×10^{-2}
3.5×10^{-1}	3.58×10^{-1}	3.52×10^{-1}	3.45×10^{-1}	3.31×10^{-1}	3.18×10^{-1}	3.04×10^{-1}	2.79×10^{-1}	2.44×10^{-1}	2.17×10^{-1}	1.94×10^{-1}	1.75×10^{-1}	1.36×10^{-1}	1.07×10^{-1}	8.46×10^{-2}	6.78×10^{-2}	4.5×10^{-2}	3.02×10^{-2}	2.10×10^{-2}	1.51×10^{-2}
6×10^{-1}	6.62×10^{-1}	6.48×10^{-1}	6.33×10^{-1}	6.01×10^{-1}	5.70×10^{-1}	5.40×10^{-1}	4.83×10^{-1}	4.03×10^{-1}	3.43×10^{-1}	2.96×10^{-1}	2.56×10^{-1}	1.82×10^{-1}	1.33×10^{-1}	1.01×10^{-1}	6.7×10^{-2}	4.76×10^{-2}	3.13×10^{-2}	2.14×10^{-2}	1.52×10^{-2}
1×10^0	1.02×10^0	9.92×10^{-1}	9.63×10^{-1}	9.05×10^{-1}	8.49×10^{-1}	7.92×10^{-1}	6.88×10^{-1}	5.42×10^{-1}	4.38×10^{-1}	3.60×10^{-1}	3.00×10^{-1}	1.99×10^{-1}	1.40×10^{-1}	1.03×10^{-1}	7.79×10^{-2}	4.78×10^{-2}			2.15×10^{-2}
2×10^0	1.57×10^0	1.52×10^0	1.46×10^0	1.35×10^0	1.23×10^0	1.12×10^0	9.18×10^{-1}	6.59×10^{-1}	4.97×10^{-1}	3.91×10^{-1}	3.17×10^{-1}	2.03×10^{-1}	1.41×10^{-1}						
3.5×10^0	2.05×10^0	1.97×10^0	1.88×10^0	1.70×10^0	1.51×10^0	1.34×10^0	1.03×10^0	6.90×10^{-1}	5.07×10^{-1}	3.94×10^{-1}									
6×10^0	2.52×10^0	2.41×10^0	2.27×10^0	2.07×10^0	1.85×10^0	1.64×10^0	1.27×10^0	8.75×10^{-1}	6.46×10^{-1}	4.96×10^{-1}									
1×10^1	2.97×10^0	2.80×10^0	2.61×10^0	2.22×10^0	1.85×10^0	1.53×10^0	1.08×10^0												
2×10^1	3.56×10^0	3.30×10^0	3.00×10^0	2.41×10^0	1.92×10^0	1.55×10^0													
3.5×10^1	4.01×10^0	3.65×10^0	3.23×10^0	2.48×10^0	1.93×10^0														
6×10^1	4.42×10^0	3.93×10^0	3.37×10^0	2.49×10^0	1.94×10^0														
1×10^2	4.77×10^0	4.12×10^0	3.43×10^0	2.50×10^0															
2×10^2	5.16×10^0	4.26×10^0	3.45×10^0																
3.5×10^2	5.40×10^0	4.29×10^0	3.46×10^0																
6×10^2	5.54×10^0	4.30×10^0																	
1×10^3	5.59×10^0																		
2×10^3	5.62×10^0																		
3.5×10^3	5.62×10^0	4.30×10^0	3.46×10^0	2.50×10^0	1.94×10^0	1.55×10^0	1.08×10^0	6.96×10^{-1}	5.07×10^{-1}	3.94×10^{-1}	3.17×10^{-1}	2.03×10^{-1}	1.41×10^{-1}	1.03×10^{-1}	7.79×10^{-2}	4.78×10^{-2}	3.13×10^{-2}	2.15×10^{-2}	1.52×10^{-2}

Courbe de type A

Table de la fonction "nappe libre" de Neuman (suite)

t_y	$\beta = 0.001$	$\beta = 0.004$	$\beta = 0.01$	$\beta = 0.03$	$\beta = 0.06$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.6$	$\beta = 0.8$	$\beta = 1.0$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.0$	$\beta = 2.5$	$\beta = 3.0$	$\beta = 4.0$	$\beta = 5.0$	$\beta = 6.0$	$\beta = 7.0$
1×10^{-4}	5.62×10^0	4.30×10^0	3.46×10^0	2.50×10^0	1.94×10^0	1.56×10^0	1.09×10^0	6.97×10^{-1}	5.08×10^{-1}	3.95×10^{-1}	3.18×10^{-1}	2.04×10^{-1}	1.42×10^{-1}	1.03×10^{-1}	7.80×10^{-2}	4.79×10^{-2}	3.14×10^{-2}	2.15×10^{-2}	1.53×10^{-2}
2×10^{-4}															7.81×10^{-2}	4.80×10^{-2}	3.15×10^{-2}	2.16×10^{-2}	1.53×10^{-2}
3.5×10^{-4}															1.03×10^{-1}	7.83×10^{-2}	4.81×10^{-2}	3.16×10^{-2}	2.17×10^{-2}
6×10^{-4}															1.04×10^{-1}	7.85×10^{-2}	4.84×10^{-2}	3.18×10^{-2}	2.19×10^{-2}
1×10^{-3}															1.04×10^{-1}	7.89×10^{-2}	4.88×10^{-2}	3.21×10^{-2}	2.21×10^{-2}
2×10^{-3}															1.05×10^{-1}	7.99×10^{-2}	4.96×10^{-2}	3.29×10^{-2}	2.28×10^{-2}
3.5×10^{-3}															1.07×10^{-1}	8.14×10^{-2}	5.09×10^{-2}	3.41×10^{-2}	2.39×10^{-2}
6×10^{-3}															1.09×10^{-1}	8.38×10^{-2}	5.32×10^{-2}	3.61×10^{-2}	2.57×10^{-2}
1×10^{-2}															1.13×10^{-1}	8.79×10^{-2}	5.68×10^{-2}	3.93×10^{-2}	2.86×10^{-2}
2×10^{-2}															1.24×10^{-1}	9.80×10^{-2}	6.61×10^{-2}	4.78×10^{-2}	3.62×10^{-2}
3.5×10^{-2}															1.39×10^{-1}	1.13×10^{-1}	8.06×10^{-2}	6.12×10^{-2}	4.86×10^{-2}
6×10^{-2}															1.66×10^{-1}	1.40×10^{-1}	1.06×10^{-1}	8.53×10^{-2}	6.14×10^{-2}
1×10^{-1}															2.10×10^{-1}	1.84×10^{-1}	1.49×10^{-1}	1.28×10^{-1}	1.13×10^{-1}
2×10^{-1}															3.07×10^{-1}	2.48×10^{-1}	2.23×10^{-1}	2.98×10^{-1}	3.57×10^{-1}
3.5×10^{-1}															4.10×10^{-1}	3.57×10^{-1}	3.23×10^{-1}	4.26×10^{-1}	5.17×10^{-1}
6×10^{-1}															5.62×10^{-1}	5.17×10^{-1}	4.89×10^{-1}	6.45×10^{-1}	8.30×10^{-1}
1×10^0															7.92×10^{-1}	7.33×10^{-1}	7.18×10^{-1}	9.09×10^{-1}	1.11×10^0
2×10^0															1.07×10^0	1.07×10^0	1.06×10^0	1.33×10^0	1.63×10^0
3.5×10^0															1.63×10^0	1.63×10^0	1.63×10^0	2.14×10^0	2.86×10^0
6×10^0															2.14×10^0	2.14×10^0	2.14×10^0	3.14×10^0	4.37×10^0
1×10^1															3.14×10^0	3.14×10^0	3.14×10^0	4.91×10^0	6.99×10^0
2×10^1															3.82×10^0	3.82×10^0	3.82×10^0	5.42×10^0	8.22×10^0
3.5×10^1															4.37×10^0	4.37×10^0	4.37×10^0	6.14×10^0	9.32×10^0
6×10^1															4.91×10^0	4.91×10^0	4.91×10^0	7.00×10^0	1.07×10^1
1×10^2															5.42×10^0	5.42×10^0	5.42×10^0	8.00×10^0	1.21×10^1

Courbe de type B

$$s = \frac{1}{4\Pi T} \left\{ Q(o)W \left(\frac{4Tt}{r^2 S} \right) + \int_0^t \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_\tau W \left[\frac{4T(t-\tau)}{r^2 S} \right] d\tau \right\}$$

Inversement, par déconvolution, on peut calculer la réponse indicelle du système, c'est-à-dire le rabattement $s(t)$ que l'on aurait observé si le débit Q avait été maintenu constant. C'est celui que l'on utilisera pour l'interprétation.

Notez qu'il existe maintenant de nombreux programmes d'interprétation automatique d'essais de débit, sur ordinateur ou sur calculatrices programmables.

8.5. AUTRES SOLUTIONS (A UNE DIMENSION) DE L'EQUATION DE DIFFUSIVITE

Il existe de nombreuses solutions analytiques de l'équation de la diffusivité: les meilleurs ouvrages de référence sont encore ceux de thermique, en particulier "Conduction of heat in solids" par Carslaw et Jeager, Oxford University Press. Toutes les symétries possibles sont envisagées.

Nous donnerons seulement deux solutions analytiques pour un écoulement à une dimension, qui sont particulièrement utiles pour l'interprétation des variations naturelles des niveaux piézométriques dans les nappes.

a) Massif semi-infini, variation brusque de charge

Equation:
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \text{ et } t \geq 0$$

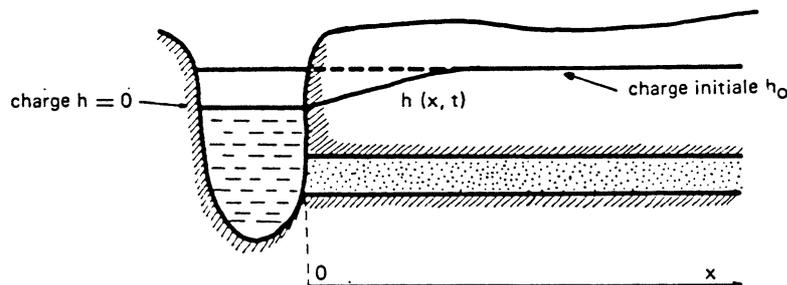
Conditions:
$$\begin{cases} h(x, 0) = h_0, & \forall x > 0 \quad (\text{initiales}) \\ h(0, t) = 0, & t \geq 0 \quad (\text{à la limite}) \end{cases}$$

Solution:
$$h(x, t) = h_0 \operatorname{erf} \left(x \sqrt{\frac{S}{4Tt}} \right)$$

où $\operatorname{erf}(u)$ est la "fonction d'erreur", connue et tabulée

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\Pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$$

Cette solution correspond au cas d'une nappe captive semi-infinie, initialement en équilibre à la charge h_0 avec une rivière qui la limite. Au temps $t = 0$, le niveau de la rivière tombe brusquement à la cote 0:



Elle correspond également au cas du tarissement d'une nappe, initialement en équilibre avec sa rivière, et qui reçoit à l'instant zéro une recharge brusque h_0 sur toute son étendue alors que le niveau dans la rivière reste constant (infiltration brusque). Une remontée h_0 brusque du niveau de la rivière, initialement en équilibre à la cote 0 avec la nappe, entraîne une variation de charge:

$$h(x, t) = h_o \left[1 - \operatorname{erf} \left(x \sqrt{\frac{S}{4Tt}} \right) \right] = h_o \operatorname{erfc} \left(x \sqrt{\frac{S}{4Tt}} \right)$$

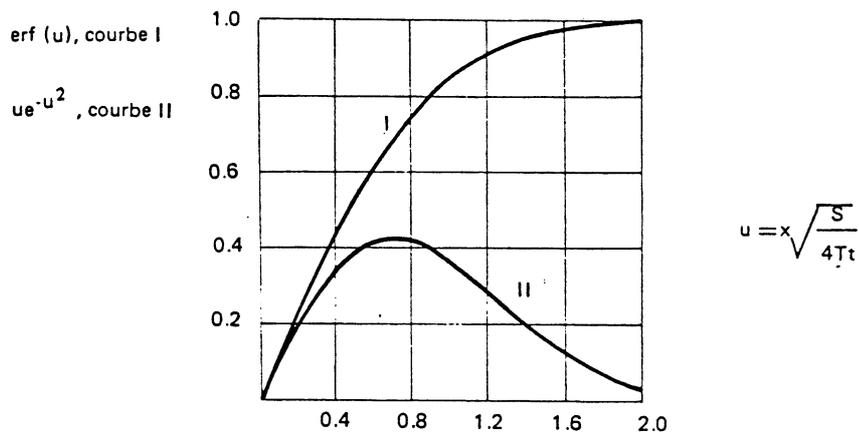
$\operatorname{erfc} = 1 - \operatorname{erf}$ étant la fonction d'erreur complémentaire.

En pratique, on raisonne toujours en variations de niveau de la nappe ou de la rivière par rapport à un état permanent.

Par convolution, on peut également calculer la réaction dans une nappe à des variations continues du niveau de la rivière.

Ci-joint l'abaque (courbe I) ainsi qu'une table de la fonction erf, extraites de Carslaw et Jaeger. La courbe II sur cette abaque donne la dérivée de h en fonction du temps ou de l'espace:

$$-\frac{t\sqrt{\pi}}{h_o} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{x\sqrt{\pi}}{2h_o} \frac{\partial h}{\partial x} = x \sqrt{\frac{S}{4Tt}} e^{-\frac{x^2 S}{4Tt}}$$



u	erf u	erfc u	u	erf u	erfc u
0	0	1.0	1.0	0.842701	0.157299
0.05	0.056372	0.943628	1.1	0.880205	0.119795
0.1	0.112463	0.887537	1.2	0.910314	0.089686
0.15	0.167996	0.832004	1.3	0.934008	0.065992
0.2	0.222703	0.777297	1.4	0.952285	0.047715
0.25	0.276326	0.723674	1.5	0.966105	0.033895
0.3	0.328627	0.671373	1.6	0.976348	0.023652
0.35	0.379382	0.620618	1.7	0.983790	0.016210
0.4	0.428392	0.571608	1.8	0.989091	0.010909
0.45	0.475482	0.524518	1.9	0.992790	0.007210
0.5	0.520500	0.479500	2.0	0.995322	0.004678
0.55	0.563323	0.436677	2.1	0.997021	0.002979
0.6	0.603856	0.396144	2.2	0.998137	0.001863
0.65	0.642029	0.357971	2.3	0.998857	0.001143
0.7	0.677801	0.322199	2.4	0.999311	0.000689
0.75	0.711156	0.288844	2.5	0.999593	0.000407
0.8	0.742101	0.257899	2.6	0.999764	0.000236
0.85	0.770668	0.229332	2.7	0.999866	0.000134
0.9	0.796908	0.203092	2.8	0.999925	0.000075
0.95	0.820891	0.179109	2.9	0.999959	0.000041
			3.0	0.999978	0.000022

b) Massif limité, variation brusque de charge

Equation:
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0$$

Conditions:
$$\begin{cases} h(x, 0) = h_0, & 0 < x \leq \ell \quad (\text{initiale}) \\ h(0, t) = 0, & t \geq 0 \quad (1^{\text{ère}} \text{ limite à potentiel imposé}) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=\ell} = 0, & t \geq 0 \quad (2^{\text{ème}} \text{ limite à flux nul}) \end{cases}$$

Solution:
$$h = h_0 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{0,5(2n+1)\ell + x}{2} \sqrt{\frac{S}{Tt}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{(2n+1)\ell - x}{2} \sqrt{\frac{S}{Tt}} \right) \right] \right\}$$

avec $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$ fonction d'erreur complémentaire

ou encore:
$$h = h_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T t}{4S \ell^2} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$$

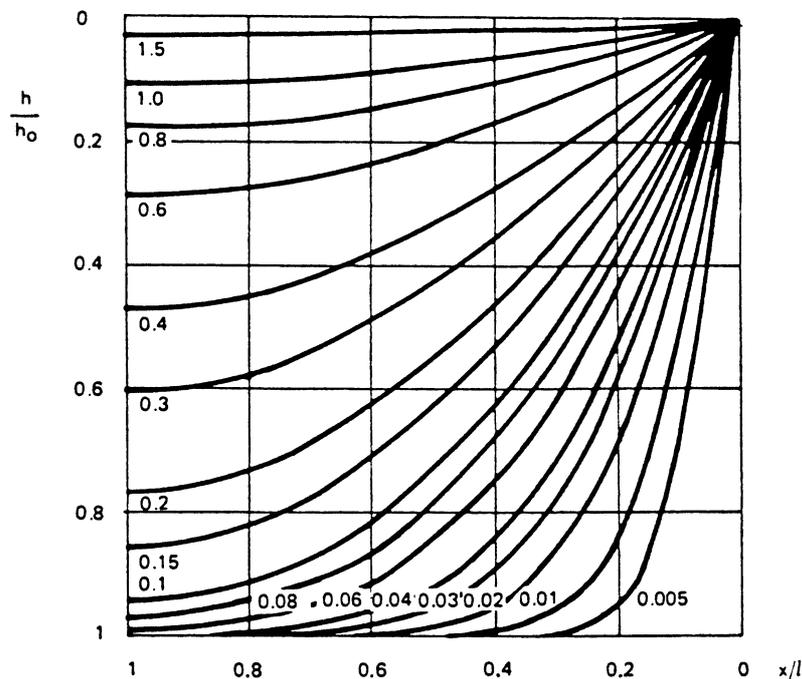
Cette solution correspond au même schéma qu'au cas a), mais avec une nappe arrêtée par une limite à flux nul à la distance $x = \ell$.

Adition = milieu semi-infini, limite en $x=0$ soumis à une condition aux limites charge imposée périodique = $h = h_0 \sin \omega_s t$ à $x=0$ avec $\omega_s = \frac{2\pi}{E_s} t_s = \text{période}$

$$h(x, t) = h_0 \operatorname{Exp} \left[-x \sqrt{\frac{\omega_s S}{2T}} \right] \sin \left[\omega_s t - x \sqrt{\frac{\omega_s S}{2T}} \right]$$

cette solution est utile pour une nappe cotière (omarrè)

C-joint l'abaque correspondante, extraite de Carslaw et Jaeger, les courbes étant indicées sur le paramètre $\frac{Tt}{S\ell^2}$.



8.6. MESURES PONCTUELLES DE PERMEABILITE IN SITU

Les essais de débit décrits aux § 8.2 et 8.4 fournissent les meilleures estimations des perméabilités moyennes d'un milieu. Ils sont cependant assez lourds à mettre en œuvre, aussi a-t-on proposé des méthodes plus rudimentaires et plus locales pour estimer les perméabilités. Nous en décrivons succinctement trois, qui sont surtout employées en génie civil.

a) Essais de poche, ou essais Lefranc

Un sondage de diamètre D est ouvert (crépiné) sur une "poche" d'une longueur ℓ face au terrain à tester. Ceci est obtenu soit en tubant le reste du forage, soit en isolant la poche au moyen d'un packer gonflable (chemise en caoutchouc qui se colle au terrain).

L'essai consiste à injecter (ou pomper) un débit permanent Q constant et à attendre que la charge (ou la pression) se stabilise (régime pseudo-permanent: on n'attend que quelques minutes). La perméabilité est donnée par la relation (Schneebeil, 1966):

$$K = \frac{\alpha Q}{D \Delta h}$$

- où Δh est la variation de charge par rapport à l'état initial,
 D est le diamètre de la poche,
 Q est le débit injecté ou soutiré,
 α est un coefficient sans dimension dépendant de la forme de la poche:

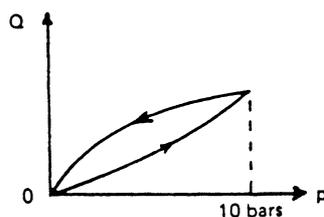
- poche plus ou moins sphérique: $\alpha = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell/D + 1/4}}$
- poche de forme ellipsoïde: $\alpha = \frac{\text{Log}(\ell/D + \sqrt{(\ell/D)^2 + 1})}{2\pi\ell/D}$
- poche très allongée ($\ell/D > 4$): $\alpha = \frac{\text{Log}(2\ell/D)}{2\pi\ell/D}$

ℓ est la hauteur de la poche, et il s'agit du Log Népérien. Lorsque la poche est voisine d'une limite (surface libre ou substratum), l'effet de limite crée une image dont on tient compte par un coefficient multiplicateur pour α égal à $\frac{1}{8\pi z/D}$, z étant la distance du centre de la poche à la limite, supposée grande devant ℓ et D .

On effectue l'essai avec différents débits pour vérifier la linéarité de la relation $Q - \Delta h$, toute non-linéarité pouvant indiquer une fuite du tubage ou du packer, ou un claquage du terrain.

b) Essais Lugeon en roches fissurées

Il s'agit d'un essai empirique très classique en sondage dans les roches fissurées. On isole par packers une longueur de trou de 5 m en général. Bien souvent, l'essai se fait à l'avancement, c'est-à-dire que chaque fois que l'on a foré 5 m, on isole avec un seul packer les 5 derniers mètres du trou. On injecte alors de l'eau sous pression en mesurant le débit stabilisé (on attend 5 à 10 minutes) en fonction de la pression. Le protocole de mesure prévoit de faire varier la pression graduellement entre 0 et 10 bars, puis inversement en réduisant la pression de 10 bars à 0. On trace alors le diagramme débit en litre/minute-pression:



Le débit à pression décroissante est généralement supérieur à celui à pression croissante. Ceci amène d'ailleurs des informations sur le comportement des roches fissurées (débouffrage des fissures, claquage du terrain, etc...).

On définit la perméabilité du terrain d'après cet essai en "unité Lugeon": c'est le débit injecté en litres par minutes, sous 10 bars de pression et par mètre linéaire de sondage, pour une durée d'essai à pression constante de 10 minutes.

On admet que si la perméabilité en unités Lugeon est petite (quelques unités à quelques dizaines), une unité Lugeon est *très approximativement* égale à 1 ou $2 \cdot 10^{-7}$ m/s (Cambefort, 1966).

c) Essais par chocs hydrauliques

Alors que les essais précédents sont en principe interprétés en régime stabilisé, les essais par chocs hydrauliques (slug tests en anglais) consistent à engendrer une impulsion de pression très brève en un point d'une nappe, et à observer la réponse transitoire au même point. L'interprétation varie en fonction de la forme de la cavité où a lieu l'impulsion (symétrie cylindrique ou sphérique). On en tire essentiellement la transmissivité (ou la perméabilité) et, avec moins de précision, le coefficient d'emménagement.

En symétrie cylindrique, on peut interpréter un essai de choc hydraulique dans un forage ou piézomètre complet, c'est-à-dire traversant et captant la totalité de l'épaisseur de la nappe. Soit T la transmissivité,

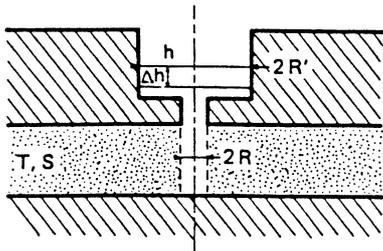
S le coefficient d'emmagasinement de la nappe, et R le rayon de l'ouvrage au droit de la nappe (rayon du trou de forage). Soit R' le rayon de l'ouvrage à la cote où se trouve le niveau statique de l'eau, supposé à l'équilibre, avant l'essai. R' sera généralement le rayon intérieur du tubage. Au temps $t = 0$, on fait varier brusquement la charge dans l'ouvrage de rayon R' d'une quantité Δh_0 (injection du soutirage d'un volume d'eau $\Pi R'^2 \Delta h_0$). On observera l'évolution avec le temps de la charge résiduelle $\Delta h(t)$ dans le tube. Elle est donnée par:

$$\frac{\Delta h(t)}{\Delta h_0} = \frac{4\alpha}{\Pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-Tu^2/R^2S)}{uF(u)} du$$

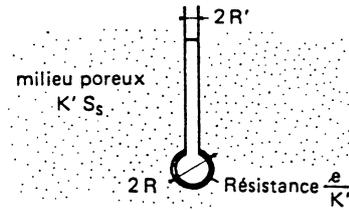
avec $\alpha = S(R/R')^2$

$$F(u) = [uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2$$

J_n, Y_n = fonctions de Bessel de 1^{ère} ou 2^{ème} espèce et d'ordre n .



Symétrie cylindrique



Symétrie sphérique

Cette solution est représentée Pl.9 en coordonnées bilogarithmiques (Degallier et Marsily, 1977). On trace sur un calque bilogarithmique de même module les mesures $\Delta h/\Delta h_0$, en fonction du temps. La superposition graphique de la courbe mesurée sur l'abaque permet de déterminer α et la correspondance temps réduit/temps réel. On en tire:

$$T = R'^2/t_i$$

t_i : temps réel coïncidant avec le temps réduit de 1 sur l'abaque

$$S = \alpha(R'/R)^2$$

Carslaw et Jaeger envisagent aussi les cas où les observations sont faites à une distance $r > R$ du forage, ou encore où il existe une résistance de contact entre le forage et la nappe.

Si la cavité sur laquelle est réalisé l'essai de choc hydraulique est de forme sphérique, la solution est donnée par les mêmes auteurs par:

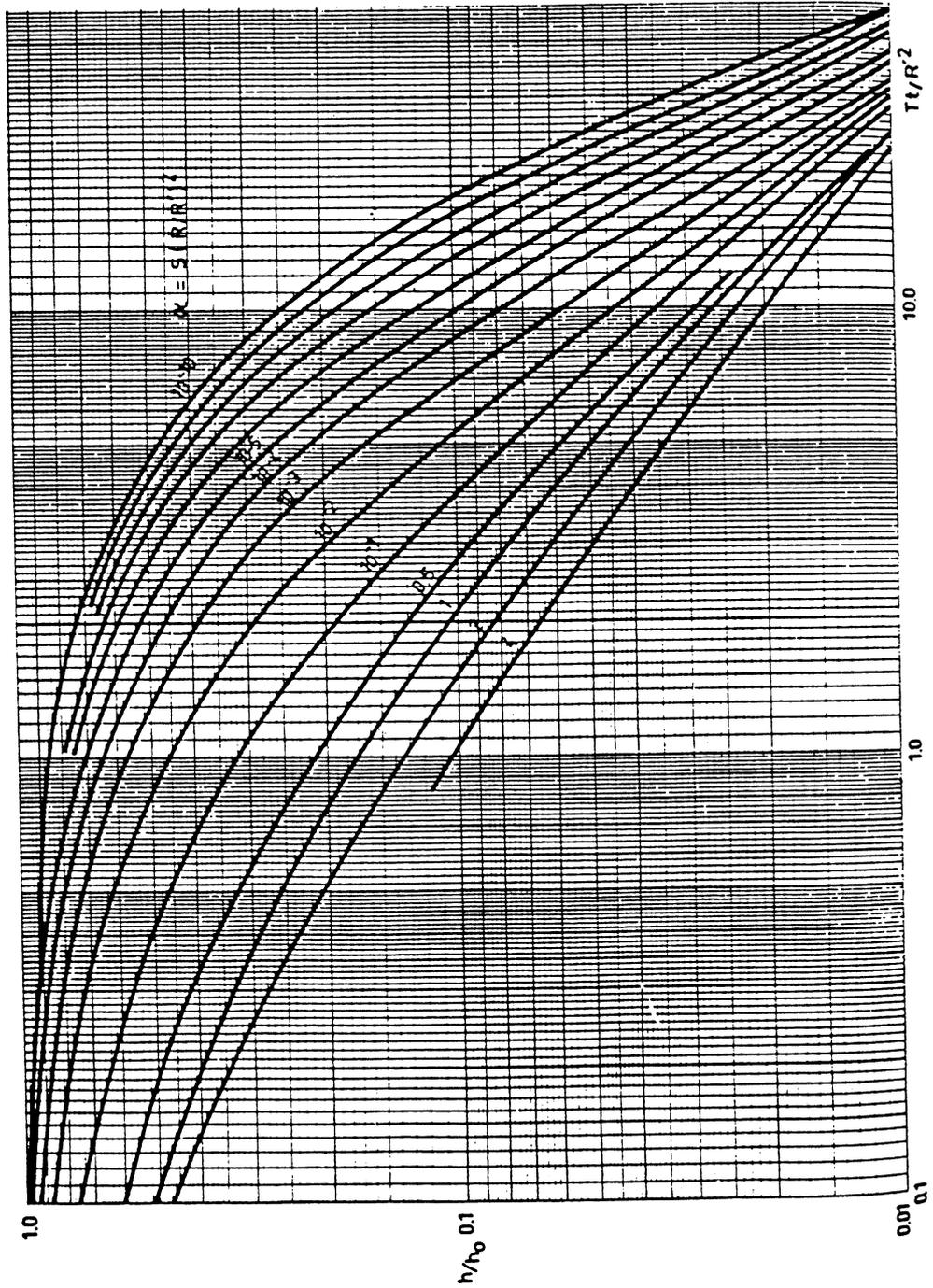
$$\frac{\Delta h(t)}{\Delta h_0} = \frac{2\alpha\gamma^2}{\Pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-Ktu^2/S_s R^2)u^2}{(u^2(1+\gamma) - \alpha\gamma^2)^2 + (u^3 - \alpha\gamma u)} du$$

avec

K, S_s : perméabilité et coefficient d'emmagasinement spécifique de l'aquifère,
 $\alpha = 4S_s R(R/R')^2$: rapport des capacités,
 $\gamma = K'R/Ke$: contraste des résistances.

La sphère de rayon R est en contact avec l'aquifère à travers une couche résistante d'épaisseur e et de perméabilité K' . La perturbation de charge Δh_0 initiale est réalisée dans un tube de rayon R' .

Cette solution dépend de deux paramètres, α et γ , et du temps réduit. La série d'abaques correspondantes a été publiée par Degallier et Marsily (1977). Elle peut être utile pour des essais sur des tensiomètres de forme voisine d'une sphère, dans le non saturé, ou sur des poches pseudo-sphériques ouvertes à la base d'un piézomètre non crépiné, ou crépiné sur une faible longueur.



Pl. 9 - Réponse indicielle d'un piézomètre cylindrique

Chapitre 9

TRANSPORT DE MASSE ET D'ENERGIE EN MILIEU POREUX

- | | |
|---|--|
| 9.1 <i>Ecoulements polyphasiques (fluides non miscibles)</i> | 9.1.5 <i>Problèmes de pollution polyphasique</i> |
| 9.1.1 <i>Théorie</i> | 9.2 <i>Ecoulements de fluides miscibles</i> |
| 9.1.2 <i>Cas particulier, écoulement en milieu non saturé</i> | 9.2.1 <i>Lois du transport en solution des éléments conservatifs</i> |
| 9.1.3 <i>Mouvements d'interface de séparation</i> | 9.2.2 <i>Lois des interactions (éléments non conservatifs)</i> |
| 9.1.4 <i>Cas particulier: interface eau douce-eau salée</i> | 9.2.3 <i>Solutions analytiques de l'équation de la dispersion</i> |
| | 9.3 <i>Transferts de chaleur en milieu poreux</i> |

Nous nous sommes intéressés jusqu'ici essentiellement aux phénomènes de transmission des pressions (ou des charges) et à leurs conséquences en termes de débit, sans nous intéresser au transfert de l'eau proprement dite.

Nous abordons ici une autre classe de problème: celle des transports qui ont lieu avec l'eau. Nous parlerons des écoulements:

- de fluides non miscibles
 - de fluides miscibles
 - de chaleur
- } en milieu poreux

Les problèmes qui y sont liés sont très nombreux: écoulement en milieu non saturé, récupération d'hydrocarbures, pollution...; et pour la chaleur: géothermie, climatisation, stockage de chaleur.

9.1. ECOULEMENTS POLYPHASIQUES (FLUIDES NON MISCIBLES)

9.1.1. Théorie

C'est, par exemple, le cas de l'air et de l'eau (milieu non saturé), de l'huile, de l'eau et du gaz (gisements pétroliers).

a) Saturation

On définit d'abord la saturation volumique pour chacun des fluides i :

$$s_i = \frac{\text{Part de la porosité occupée par le fluide } i}{\text{Porosité totale}}$$

s_i varie entre 0 et 1.

b) Loi de Darcy

On admet ensuite que chaque fluide i suit séparément la loi de Darcy, comme s'il occupait une certaine portion du milieu poreux.

$$\vec{U}_i = -\frac{\bar{k}_i}{\mu_i} \left[\vec{\text{grad}} p_i + \rho_i g \vec{\text{grad}} z \right]$$

\vec{U}_i = vitesse de Darcy du fluide i
 μ_i, ρ_i, p_i = sa viscosité, masse volumique et pression.

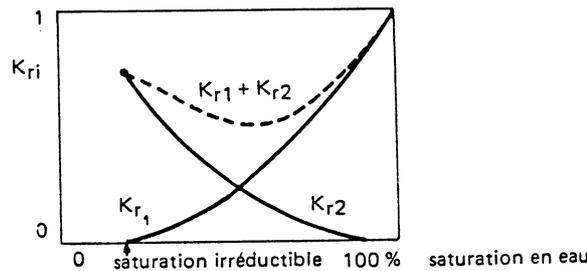
Les vitesses de Darcy de chaque fluide ne sont évidemment pas parallèles, et peuvent même, dans certains cas, être diamétralement opposées (eau et gaz par exemple).

Cependant, la perméabilité intrinsèque k_i sera une fonction de la saturation du milieu en fluide i . Plus la portion du milieu poreux occupée par le fluide i sera grande, plus la perméabilité liée à ce fluide sera grande. On définit généralement la perméabilité relative par:

$$k_{r,i} = \frac{k_i}{k}$$

k étant la perméabilité intrinsèque (saturée) du milieu poreux.

Par exemple, pour deux fluides (air et eau), on obtient des courbes ayant l'allure suivante:



En dessous d'une certaine saturation limite (en eau par exemple), la phase eau n'est plus continue et la perméabilité à l'eau est nulle. On peut noter au passage que la somme des deux perméabilités intrinsèques de deux fluides n'est pas constante, et est toujours inférieure ou égale à la perméabilité intrinsèque: les deux fluides, en quelque sorte, se gênent mutuellement.*

Ces courbes de perméabilité relative sont déterminées expérimentalement sur échantillon. Elles ne sont malheureusement pas biunivoques et subissent des cycles d'hystérésis, comme la pression capillaire (cf. § 2.2.2.c) suivant que l'on réalise un drainage ou une imbibition. On néglige cependant très souvent cette hystérésis.

On appelle parfois le rapport $\frac{k_{r,i}}{\mu_i}$ la "mobilité" du fluide i .

c) Equation de continuité

On écrit une équation de continuité pour chaque fluide:

$$\text{div} (\rho_i \vec{U}_i) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i s_i \omega) = 0$$

* Dans certaines expériences d'écoulement d'eau, d'huile et de gaz, on a mesuré expérimentalement des sommes de perméabilités relatives supérieures à 1 (jusqu'à 2). On a tenté d'expliquer ceci en disant que l'un des fluides sert de "lubrifiant" à l'écoulement des autres.

où $\rho_i s_i \omega$ est la quantité de fluide i contenue dans l'élément de volume unité.

d) Relation entre les saturations

$$\Sigma s_i = 1 \quad (\text{par définition})$$

e) Existence de la pression capillaire

Nous avons vu, au § 2.2.2.c, qu'il existe entre deux fluides non miscibles, une interface qui engendre une différence de pression entre les deux fluides. Cette différence de pression est appelée "pression capillaire":

$$p_{c_{ij}} = p_i - p_j$$

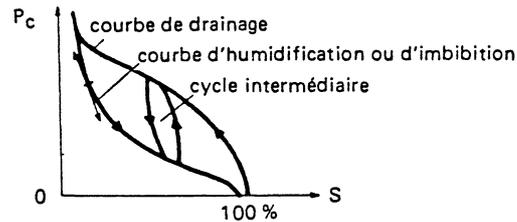
On sait que la pression capillaire est liée au rayon de courbure r des ménisques formant les interfaces entre les deux fluides, et à la tension superficielle σ_{ij} existant entre les deux fluides:

$$p_{c_{ij}} = \frac{2\sigma_{ij}}{r}$$

A cause de ce rayon de courbure, la pression capillaire est donc fonction de la saturation s_i des fluides. Si on se limite, par exemple, à deux fluides (air et eau):

$$P_{\text{air}} - P_{\text{eau}} = p_c(s)$$

Nous avons représenté au § 2.2.2.c quelques courbes de pression capillaire en fonction de la saturation. Malheureusement, nous avons également vu que ces courbes ne sont pas uniques, et qu'il existe des phénomènes d'hystérésis entre p_c et s , suivant que s augmente ou diminue:



Ces courbes sont obtenues expérimentalement.

f) Résolution

Si on ajoute à ce système les équations d'état des fluides et du milieu poreux (variation de ω, ρ_i avec p_i), on obtient un système d'autant d'équations que d'inconnues, qu'il faut résoudre.

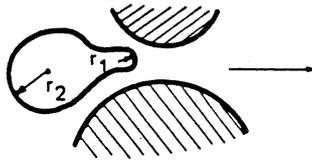
Cette résolution est toujours numérique, car il n'existe pas de solution analytique complète. Les programmes de résolution sont relativement lourds et complexes, et principalement développés dans l'industrie pétrolière.

Le problème peut être encore plus compliqué s'il y a des échanges entre phases (huile et gaz) et si l'on tient compte des phénomènes thermiques liés à ces changements de phases (naturels ou lors d'injection de vapeur dans un gisement). Il faut aussi tenir compte des variations de viscosité de chaque fluide.

g) Pièges capillaires et digitations

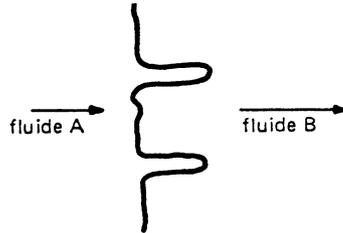
La circulation diphasique permet d'expliquer le phénomène de "pièges capillaires" qui est responsable de la formation de certains gisements de pétrole dans les milieux poreux sédimentaires.

Imaginons un écoulement d'huile et d'eau, l'huile étant supposée être le fluide non mouillant. Une goutte d'huile étranglée dans un pore trop petit se présentera de la façon suivante:



Du fait des gradients de pression de l'écoulement, elle aura, entre l'amont et l'aval, une différence de rayon de courbure, r_1 et r_2 . Pour que la goutte franchisse le passage étroit du pore, il faudra lui appliquer un gradient de pression minimum fournissant un rayon r_1 suffisamment petit. En dessous de ce gradient, la goutte d'huile est "piégée".

Un autre problème posé par les écoulements diphasiques est celui des instabilités, ou digitations. Si l'on tente de déplacer un fluide A par un fluide B , au lieu d'avoir une interface abrupte entre les deux fluides, ou encore une zone de transition où la saturation varie de façon continue entre A et B , on constate bien souvent que le fluide A pénètre, par exemple, le fluide B comme un "doigt":

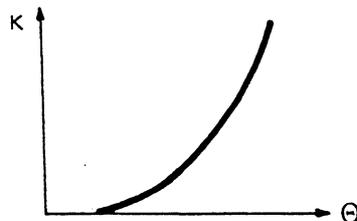


C'est le phénomène de digitation qui caractérise un écoulement instable. Les conditions de stabilité ou d'instabilité d'un écoulement biphasique sont assez complexes, et font intervenir viscosité, densité, perméabilités relatives et vitesse d'écoulement. Voir Marle, cours de production de l'I.F.P.

9.1.2. Cas particulier: écoulement en milieu non saturé

On fait généralement l'hypothèse que la phase air est immobile dans les sols non saturés et l'on ne calcule le mouvement que dans la phase eau:

- On détermine d'abord expérimentalement la relation perméabilité de Darcy-teneur en eau (ou saturation) que l'on admet être univoque (pas d'hystérésis).



- On néglige la compressibilité de l'eau et on écrit la loi de Darcy en utilisant la charge:

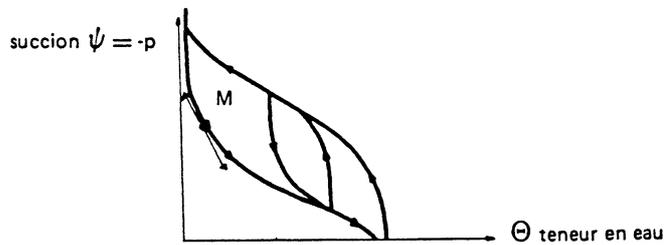
$$\vec{U} = -K(\Theta) \overrightarrow{\text{grad}} h$$

La charge est définie, comme d'habitude, par:

$$h = \frac{P}{\rho g} + z$$

mais la pression de l'eau est alors négative (on parle de la succion: $\psi = -p$).

- On utilise la charge h comme variable, et on passe de la charge h à la teneur en eau Θ par une relation expérimentale succion-teneur en eau qui, elle, présente les phénomènes d'hystérésis, dont on tient - ou non - compte.



On écrit alors l'équation de continuité:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Theta) = 0$$

soit $\operatorname{div} \vec{U} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$ car on suppose ρ constant et le milieu poreux incompressible.

La loi de Darcy donne \vec{U} en fonction de la charge h . Il reste à exprimer la variation de teneur en eau $d\Theta$ en fonction de la variation de charge dh dans l'intervalle de temps unité, et en un point fixe donné.

Si l'on se place en un point de plan $\psi(\Theta)$ et sur un cycle donné d'humidification-drainage, la variation de Θ avec ψ est donnée par la pente de la courbe ci-dessus:

$$d\Theta = \frac{d\Theta}{d\psi} d\psi = -\frac{d\Theta}{dp} dp$$

La variation de pression est liée à la variation de charge en un point fixe donné:

$$dp = \rho g dh$$

On obtient donc: $\operatorname{div}(K(\Theta) \operatorname{grad} h) = -\rho g \left(\frac{d\Theta}{d\psi} \right)_{\Theta} \frac{\partial h}{\partial t}$

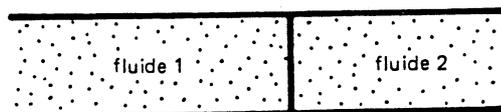
Cette équation est très fortement non linéaire et est résolue numériquement. Voir en particulier les travaux de Vaclin et al. (1979).

L'avantage d'écrire cette équation en charge, et non en teneur en eau comme on pourrait également le faire, est que:

- la charge est continue quand on passe du milieu saturé au non saturé; on modélise l'ensemble du milieu de façon continue;
- la charge est également continue même si le milieu n'est pas homogène: il y a, en revanche, discontinuité des teneurs en eau au contact de deux milieux de caractéristiques différentes.

9.1.3. Mouvements d'interface de séparation

On peut parfois admettre que, lors du déplacement de deux fluides non miscibles, l'un d'eux déplace entièrement l'autre: chaque fluide occupe en totalité le milieu poreux où il se trouve (saturation 1) et une interface abrupte est supposée exister entre deux fluides:



On résout alors l'équation de continuité (en appliquant la loi de Darcy) dans chacun des domaines séparément et on déplace la limite de séparation au cours du temps, en supposant que l'écoulement est stable.

Les conditions aux limites qui existent à l'interface sont:

- égalité des pressions $p_1 = p_2$
(On néglige l'existence d'une pression capillaire car l'interface, étant supposée plane, a un rayon de courbure infini).
- égalité des vitesses de Darcy normales de déplacement des fluides:

$$K_i \frac{\partial h_i}{\partial n} = K_j \frac{\partial h_j}{\partial n} = -V_n$$

Le déplacement de l'interface est donné par la vitesse microscopique moyenne normale des deux fluides à l'interface:

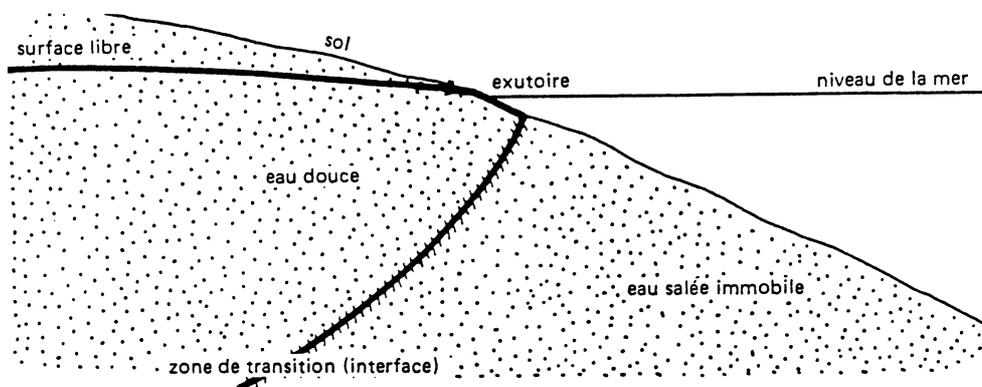
$$V = \frac{V_n}{\omega_c} \quad \omega_c : \text{porosité cinématique}$$

9.1.4. Cas particulier: interface eau douce-eau salée

Ce type de contact relève en fait des écoulements de fluides miscibles. On le traite cependant souvent en faisant les deux hypothèses suivantes, pour le contact des eaux douces des aquifères côtiers avec la mer:

- l'eau salée est immobile,
- l'eau douce s'écoule sur l'eau salée avec une interface abrupte sans mélange.

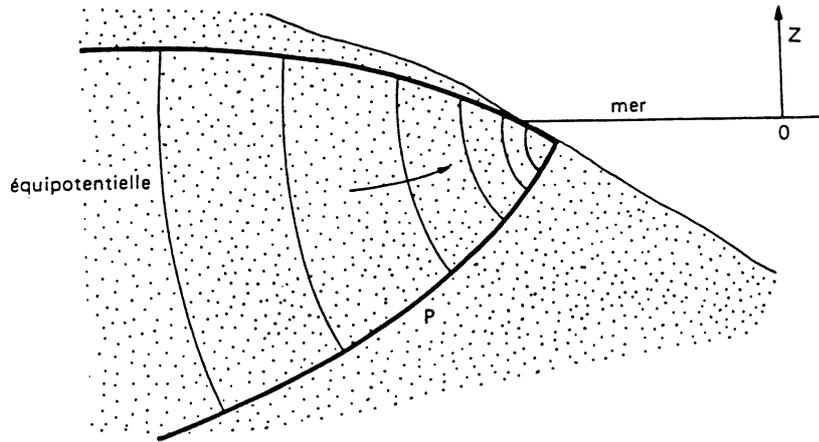
Cette approximation est à peu près valable si le régime d'écoulement est permanent, donc avec une interface immobile. En effet, on observe dans la pratique une zone de transition entre l'eau douce et l'eau salée qui est d'épaisseur très réduite (de l'ordre du mètre):



La faible épaisseur de cette zone de transition immobile s'explique par le fait que l'eau douce s'écoule vers l'exutoire littoral et entraîne constamment les eaux salées qui diffusent.

En revanche, si "l'interface" se déplace, soit sous l'influence de la marée ou des variations du débit sortant de la nappe vers la mer (variations naturelles ou dues aux prélèvements), la zone de transition devient plus importante, et le problème doit être traité en écoulements de fluides miscibles si l'on s'intéresse à ce qui se passe au voisinage du contact (problème de l'invasion des nappes côtières par les eaux salées).

Mais plaçons-nous dans le cas du régime permanent avec interface abrupte:



La surface libre et le "biseau salé" sont des lignes de courant de l'écoulement. Les équipotentielle leur sont donc orthogonales.

En un point P (de cote z) du biseau, l'égalité des pressions et l'immobilité de l'eau de mer nous permettent d'écrire (1=eau douce, 2=eau salée):

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= -\rho_2 g z \\ p_1 &= -\rho_1 g z + \rho_1 g h_1 \end{aligned} \right\} (\rho_2 - \rho_1) g z = -\rho_1 g h_1$$

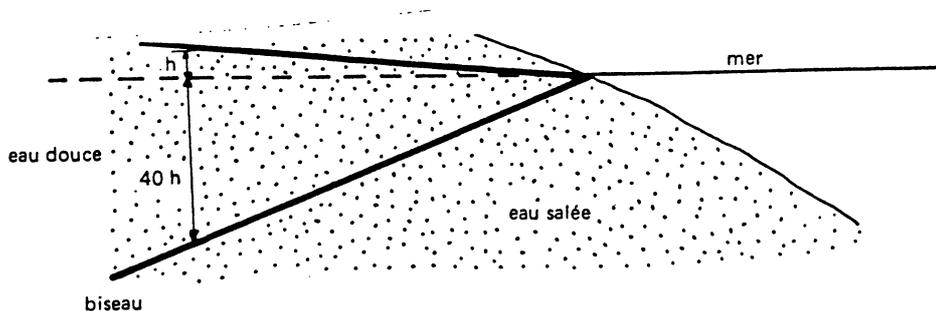
soit
$$z = -\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h_1$$

La profondeur z de l'interface est liée à la charge h dans l'eau douce et au contraste de densité.

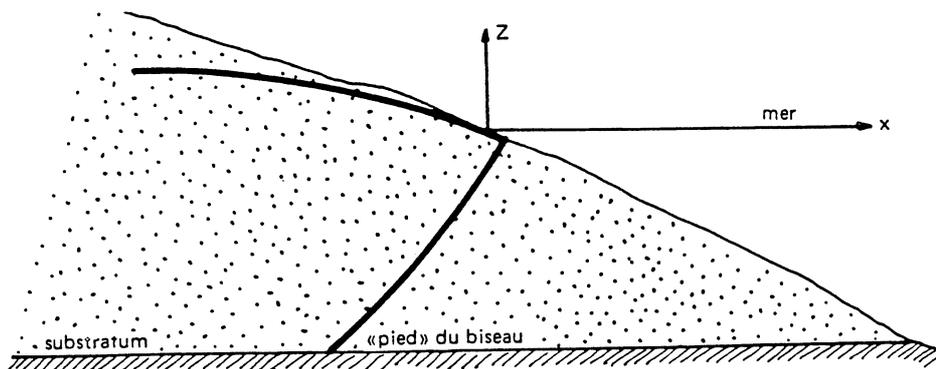
A 32 g/l de sel, la masse volumique de l'eau de mer est voisine de 1,025 t/m³. Ceci donne:

$$z \simeq -40h$$

Cette relation est connue sous le nom de "principe de Ghyben-Herzberg". Si l'on admet de plus que les équipotentielles sont verticales, et la surface libre de pente constante (toutes deux approximations assez grossières), on obtient comme première approximation du biseau salé une droite:



Ceci permet, en première approximation, d'estimer, sur une nappe côtière, la profondeur probable de l'interface eau douce-eau salée. Si, par exemple, à 200 m du rivage, la charge piézométrique est de 2 m au-dessus du niveau de la mer, la profondeur du biseau sera d'environ 80 m, à moins qu'il n'ait déjà été arrêté par le substratum de la nappe (c'est-à-dire si la nappe n'a pas 80 m d'épaisseur):



Verruijt a cependant calculé exactement la forme de la surface libre et du biseau dans le cas du milieu homogène infini: pour un flux constant s'écoulant en mer, on montre facilement, en calculant le potentiel complexe de l'écoulement, que surface libre et biseau sont en fait deux portions de parabole d'équation:

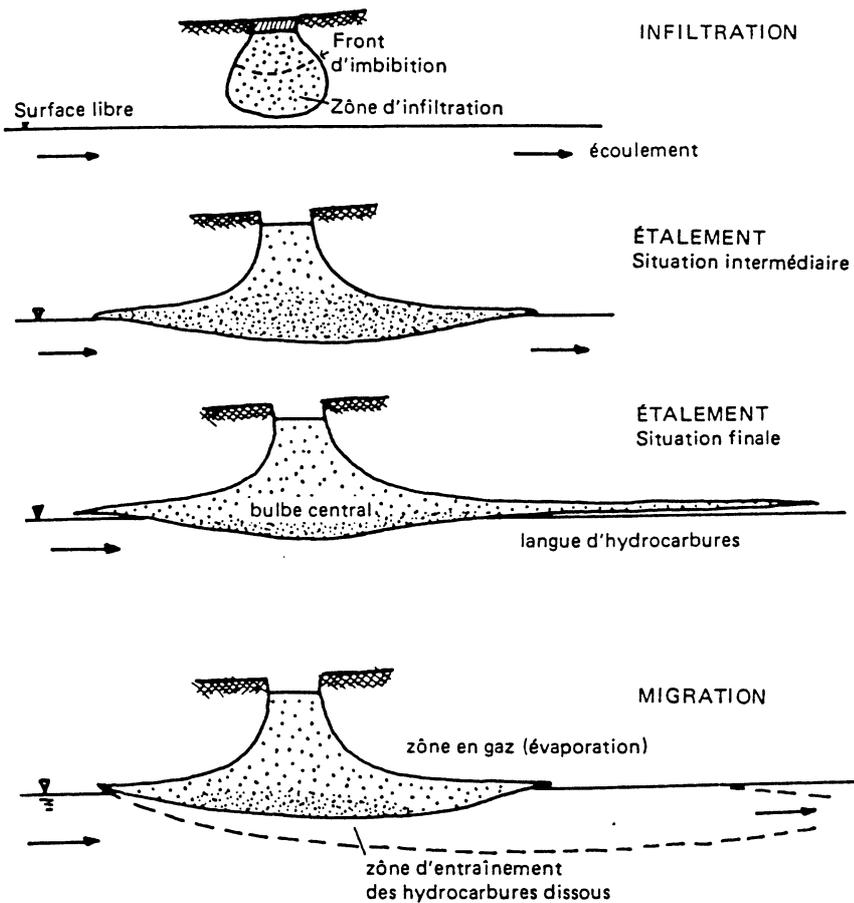
$$\left. \begin{array}{l} \text{biseau: } z^2 = -\frac{2Q}{\beta K(1+\beta)}x + \frac{Q^2}{\beta^2 K^2} \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ \text{surface libre: } z^2 = \frac{2\beta Q}{K(1+\beta)}x \end{array} \right\} \text{potentiel complexe: } Ky = \frac{(1+\beta)\Gamma^2}{2\beta Q} + i\Gamma$$

avec: z compté positivement vers le haut à partir du niveau de la mer,
 x compté positivement vers la mer à partir du rivage,
 Q est le débit d'eau douce s'écoulant dans l'aquifère vers la mer par unité de longueur perpendiculaire au plan de figure,
 $\beta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$
 $y = x + iz$, affixe complexe,
 K est la perméabilité du milieu.

9.1.5. Problèmes de pollutions polyphasiques

Il s'agit essentiellement de la pollution des nappes par les hydrocarbures, seuls fluides usuels non miscibles à l'eau. Ils sont complexes à traiter car, la pollution des nappes se faisant par leur surface, il faut d'abord traiter le transfert des hydrocarbures à travers le non saturé. On s'aperçoit alors qu'il faut une relativement grande quantité d'hydrocarbures pour que la pollution arrive à la nappe, une fraction importante étant retenue par capillarité dans la zone non saturée, puis également dans la zone saturée, par des phénomènes d'adsorption dont nous parlerons ultérieurement. Ils s'apparentent ici à la constitution dans le sol d'une saturation minimum en huile, en-dessous de laquelle la phase huile ne peut pas circuler.

Une fois arrivée au toit de la nappe, l'huile s'y accumule et migre vers l'aval. La figure suivante, extraite de Freeze et Cherry et de Schwille, illustre ce processus.



Il ne faut pas oublier cependant que certaines fractions des produits pétroliers (les séries aromatiques particulièrement, certains phénols) peuvent être solubles dans l'eau, et se propager comme fluides miscibles polluant rapidement les nappes (goûts).

La phase organique retenue par capillarité dans la zone non saturée est peu à peu résorbée par une décomposition bactérienne des produits pétroliers. Mais ceci peut prendre plusieurs années. Voir aussi les travaux de Zilliox (Fried et al., 1979).

9.2. ECOULEMENTS DE FLUIDES MISCIBLES

Les fluides étant miscibles, on ne considèrera plus qu'une seule phase fluide, et on définira la concentration d'une substance dans l'autre: par exemple, concentration d'eau salée dans l'eau douce, ou plus simplement de sel dans l'eau.

Il n'y aura plus d'interface, mais une variation continue de la concentration dans le milieu. C'est la concentration C qui sera la variable principale. On appelle "transport en solution" ce type de déplacement.

9.2.1. Lois du transport en solution des éléments conservatifs

Pour séparer nettement ce qui est lois du transport des lois d'échange entre les éléments transportés et le milieu, nous traiterons, dans ce paragraphe, du mouvement des éléments ne subissant aucune modification ou échange en parcourant le milieu poreux: on les appelle les éléments conservatifs. Ceci exclut donc aussi bien la décroissance radioactive que les phénomènes d'adsorption.

Dans le paragraphe 9.2.2., nous traiterons du problème des éléments non conservatifs et verrons comment les lois particulières du comportement des éléments non conservatifs viennent se rajouter aux équations du transport proprement dites.

Il est d'abord nécessaire de bien caractériser ce que l'on entend par transport d'éléments en solution. Au premier chef, il s'agit d'éléments qui sont inclus dans des combinaisons chimiques formant des sels solubles dans l'eau. Ces sels peuvent eux-mêmes être plus ou moins ionisés*, suivant leur force ionique. Cependant, ces éléments dissous peuvent également être présents sous forme de complexes chimiques électriquement neutres, formés d'agrégats de différentes molécules ou ions.

Par ailleurs, des sels dits "insolubles" peuvent cependant être transportés en solution en éléments-traces, cette "insolubilité" n'étant jamais nulle en réalité; compte tenu des très faibles concentrations auxquelles certains radioéléments sont toxiques, par exemple, ces éléments-traces peuvent ne pas être négligeables dans les calculs de sûreté radiologique.

Il faut enfin y ajouter les éléments transportés dans des agrégats moléculaires plus importants, tels que des micelles ou des colloïdes, qui sont éventuellement susceptibles d'être retenus par filtration mécanique dans le réseau du milieu poreux, compte tenu de leur diamètre.

Tous ces éléments transportés sont dits "en solution" dans la mesure où ils ne constituent pas une phase mobile différente de la phase fluide, mais s'intègrent à l'unique phase fluide (l'eau du milieu naturel) en y modifiant éventuellement les propriétés physiques (masse volumique et viscosité) et chimiques.

On oppose ainsi le transport en solution aux écoulements de fluide immiscible, tels que les écoulements d'huile et de l'eau, dont les lois de migration sont entièrement différentes.

Quand des éléments en solution sont transportés par un fluide en mouvement, on définit, pour caractériser le transport, la concentration volumique du fluide qui circule en chacune des substances en solution. On l'exprime généralement en g/l ou mg/l, ou encore, pour des radioéléments, en multiples ou fractions de la C.M.A.P. (Concentration Maximum Admissible dans l'eau de boisson pour la Population, définie par les arrêtés officiels).

Nous allons maintenant préciser les lois du transport dans les milieux poreux et fissurés.

a) Milieu poreux

On distingue classiquement trois mécanismes principaux de migration: la convection, la diffusion et la dispersion cinématique.

- La convection:

C'est l'entraînement des éléments en solution dans le mouvement du fluide qui se déplace. C'est le phénomène le plus intuitif de déplacement. Il est cependant nécessaire de définir avec précision:

- quelle est la partie effectivement mobile du fluide présent dans le milieu poreux,
- quelle est la vitesse réelle de mouvement de ce fluide.

En effet, dans un milieu poreux saturé, on doit distinguer deux fractions fluides, celle qui est liée au solide par des forces d'attraction moléculaire, dite eau liée, et celle qui est libre de circuler sous l'action des gradients de charge hydraulique, dite eau libre. En réalité, particulièrement pour les milieux peu perméables, la fraction libre dépend en fait de l'importance des gradients de charge: pour les argiles, les écarts à la loi de Darcy que nous avons signalés plus haut s'accompagnent d'une augmentation de la fraction d'eau libre au détriment de la fraction d'eau liée quand les gradients de charge augmentent.

On est donc amené à définir une "porosité cinématique" ω_c correspondant à la fraction des vides du milieu poreux occupée par de l'eau en mouvement. Cette porosité cinématique est donc éventuellement fonction du gradient, mais de telles mesures n'ont jamais été réalisées.

* La terminologie récente anglo-saxonne appelle ion tout sel en solution, qu'il soit ou non chargé électriquement. Ainsi, par exemple, Co_3Ca en solution, non dissocié en Co_3^{2+} , Ca^{2-} , sera appelé un ion complexe électriquement neutre.

Si l'on suppose que le transport est régi par ce seul phénomène de convection dans la fraction fluide en mouvement, l'équation résultante du transport s'obtient aisément à l'échelle du volume élémentaire par application du principe de conservation de la matière.

Considérons un volume élémentaire de milieu poreux D , de frontière extérieure Σ . La conservation de la masse de l'élément transporté dans le volume D s'écrit:

Intégrale sur Σ du flux massique de l'élément transporté entrant dans D = variation de la masse de l'élément dans le volume D dans l'intervalle de temps unité.

Le flux volumique de fluide traversant la surface Σ est donné par l'intégrale de la vitesse de Darcy U sur Σ ; ce flux volumique se transforme en flux massique de l'élément transporté en multipliant scalairement la vitesse de Darcy U par la concentration C : le premier membre de l'équation de conservation s'écrit (flux massique entrant dans D):

$$\int_{\Sigma} C \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma$$

n étant la normale sur Σ orientée vers l'extérieur de D .

La masse de l'élément transporté contenu dans le domaine D s'obtient en sommant les volumes élémentaires de fluides $\omega_c dv$ contenus dans le milieu poreux, multipliés par la concentration volumique C du dit fluide en élément considéré:

$$\int_D \omega_c C dv$$

La porosité ω_c qu'il faut utiliser est ici la porosité cinématique (c'est-à-dire la fraction de fluide qui circule) car nous supposons pour l'instant que c'est elle seule qui peut contenir l'élément transporté; ailleurs la concentration C est nulle. On fait donc ici l'hypothèse que l'on peut définir dans le volume D une concentration moyenne C résultant du mélange, dans la fraction fluide de D , de tous les éléments contenus.

La variation de cette masse dans l'intervalle de temps unité s'obtient simplement en dérivant cette expression par rapport au temps:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \omega_c C dv = \int_D \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} dv$$

le passage de la 1^{ère} forme à la 2^{ème} s'effectuant par la règle de Leibnitz, D étant fixe et ω_c étant supposé constant.

En égalant les deux membres, il vient:

$$\int_{\Sigma} C \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_D \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} dv$$

On transforme l'intégrale de surface du 1^{er} membre en intégrale de volume par la formule d'Ostrogradsky:

$$\int_{\Sigma} C \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_D \operatorname{div} (C \vec{U}) dv$$

soit:

$$- \int_D \operatorname{div} (C \vec{U}) dv = \int_D \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} dv$$

En supprimant les signes intégrale dans les deux membres, car D est arbitraire:

$$- \operatorname{div} (C \vec{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9.2.1.1)$$

- La diffusion moléculaire:

C'est un phénomène physique lié à l'agitation moléculaire: dans un fluide au repos, le mouvement brownien envoie des particules dans toutes les directions de l'espace. Si la concentration du fluide est homogène dans l'espace, deux points voisins envoient, en moyenne, autant de particules*, l'une vers l'autre, et l'agitation moléculaire ne modifie pas la concentration de la solution. Cependant, si la concentration de la solution n'est pas homogène dans l'espace, autrement dit s'il existe un gradient de concentration entre deux points voisins, le point ayant la concentration la plus élevée enverra en moyenne plus de particules dans toutes les directions que le point ayant une concentration faible. La résultante de cette agitation moléculaire sera donc un transfert de particules des zones à concentration élevée vers les zones à concentration faible.

Fick a établi que le flux massique de particules est, dans un fluide au repos, proportionnel au gradient de concentration:

$$\vec{\phi} = -d_o \overrightarrow{\text{grad}} C$$

Le coefficient de proportionnalité d_o , baptisé coefficient de diffusion moléculaire, est isotrope et s'exprime par:

$$d_o = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\mu r} \quad \text{dimension } [L^2T^{-1}]$$

avec: R = constante des gaz parfaits = 8,32 unités MKS (Si), $[ML^2T^{-2} \text{ } ^\circ K^{-1}]$,
 N = nombre d'Avogadro = $6,023 \times 10^{23}$,
 T = température absolue (degré Kelvin) = température $^\circ C + 273,15$,
 μ = viscosité du fluide,
 r = rayon moyen des agrégats moléculaires qui diffusent.

Par exemple, pour ClN dans l'eau à $20^\circ C$, $d_o = 1,3 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{sec}$.

Si le transport d'éléments dans un fluide au repos est seulement dû à la diffusion de Fick, on établit simplement, par le principe de conservation de la matière, la loi de mouvement, exactement comme plus haut:

$$\int_{\Sigma} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_D \text{div} (\vec{\phi}) dv = \int_D \frac{\partial}{\partial t} C dv$$

soit, en remplaçant ϕ par sa valeur et en supprimant les intégrales:

$$\text{div} (d_o \overrightarrow{\text{grad}} C) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

connue sous le nom de loi de Fick.

En milieu poreux, la diffusion moléculaire se poursuit dans l'ensemble de la phase fluide (aussi bien celle qui s'écoule que celle qui est immobile). Seul le solide arrête (ou tout au moins ralentit très fortement) le mouvement brownien des particules. Il en résulte, pour un fluide dans un milieu poreux qui ne s'écoule pas, un coefficient de diffusion en milieu poreux qui est plus faible que d_o .

On admet généralement que le rapport d/d_o , appelé la tortuosité du milieu vaut:

$$\frac{d}{d_o} = \frac{1}{F\omega}$$

F = facteur de formation des géophysiciens, défini par le rapport résistivité électrique de la roche sur résistivité de l'eau contenue.
 ω = porosité totale.

En pratique, $\frac{d}{d_o}$ varie de 0,1 (argiles**) à 0,7 (sables).

* Nous nous intéressons, ici, aux particules des éléments en solution, pas à l'eau.

** Neretnieks cite des mesures de $\frac{d}{d_o}$ jusqu'à 0,01 pour de la bentonite très compactée, pour des gaz, le césium et le strontium.

Pour un fluide qui circule en milieu poreux, on combine aisément les phénomènes de convection et de diffusion en établissant de nouveau la conservation de la masse de l'élément transporté dans un volume D élémentaire, en sommant les deux flux de matière au 1^{er} membre:

$$1^{\text{er}} \text{ membre: } \int_{\Sigma} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma} C \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_D \text{div} (\omega \vec{\phi} + C \vec{U}) dv$$

La porosité totale intervient car l'intégrale du flux diffusif ϕ sur Σ est nulle sur le solide de proportion $(1 - \omega)$, alors que la vitesse de Darcy est définie comme si la surface totale Σ était offerte à l'écoulement.

$$2^{\text{ème}} \text{ membre: } \frac{\partial}{\partial t} \int_D \omega_c C dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_D (\omega - \omega_c) C' dv$$

Nous sommes en effet obligés de prendre en compte deux porosités, la porosité cinématique ω_c correspondant à la fraction mobile de la phase fluide, ayant la concentration C , et la porosité correspondant à la fraction immobile $\omega - \omega_c$ (ω étant la porosité totale), ayant une concentration C' qui peut être différente de C .

Dans le cas de la convection pure, seule la fraction mobile du fluide pouvait contenir les éléments transportés, alors que maintenant, la fraction immobile contient nécessairement ces éléments puisque la diffusion moléculaire va les faire pénétrer dans la fraction immobile.

Cette équation s'écrit, en substituant et simplifiant comme plus haut:

$$\text{div} (\omega d \overrightarrow{\text{grad}} C - C \vec{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} + (\omega - \omega_c) \frac{\partial C'}{\partial t} \quad (9.2.1.2)$$

Un problème se pose de savoir s'il faut faire intervenir C' dans les flux entrant au 1^{er} membre. Pour la convection, il est évident que seule la concentration C de la fraction mobile apporte des éléments au volume de référence. Pour la diffusion, les fractions immobiles de part et d'autre de la surface Σ du volume de référence échangent des éléments en fonction du gradient de C' . Il faudrait, en toute rigueur, écrire le terme diffusif:

$$\omega_c \text{div} (d_1 \overrightarrow{\text{grad}} C) + (\omega - \omega_c) \text{div} (d_2 \overrightarrow{\text{grad}} C')$$

ω_c étant la fraction de la surface Σ occupée par du fluide mobile, diffusant alors avec un coefficient d_1 , et $(\omega - \omega_c)$ étant le reste de la fraction fluide de Σ (fluide immobile) à travers laquelle la diffusion sur la concentration C' s'effectue avec un coefficient de diffusion d_2 . d_1 et d_2 seraient probablement respectivement plus forts et plus faibles que le coefficient global d .

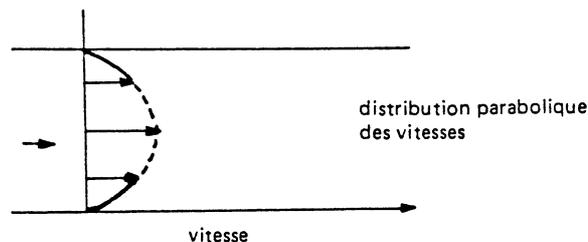
Nous négligerons cet effet, en particulier en raison de l'existence de la dispersion cinématique, qui rend déjà elle-même la diffusion presque négligeable.

Nous verrons au paragraphe 9.2.2.a. comment la concentration C' de la fraction immobile peut se regrouper avec l'adsorption sur la phase solide du milieu poreux.

- La dispersion cinématique:

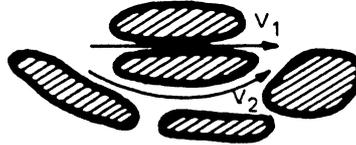
C'est un phénomène de mélange essentiellement lié à l'hétérogénéité des vitesses microscopiques, quelle qu'en soit l'échelle d'observation, au sein du milieu poreux.

- A l'intérieur d'un pore, les vitesses ne sont pas uniformément réparties dans la fraction mobile, en régime laminaire, comme l'indique la formule de Poiseuille dans une conduite cylindrique:



Ceci entraîne une propagation plus rapide des éléments transportés dans l'axe des pores d'où, par mélange et diffusion moléculaire, un étalement progressif des éléments transportés par rapport au mouvement moyen de convection.

- De pore à pore, la différence des ouvertures et des longueurs de trajets engendre une différence des vitesses moyennes:



Les fluides passant par chacun des chemins se mélangent et engendrent une dilution de la concentration.

Notons que ce processus entraîne également un étalement de la propagation des éléments par rapport à la direction principale de l'écoulement:



- Une stratification, ou tout élément d'hétérogénéité à plus grande échelle tel que lentilles, intercalations, zones broyées ou fissurées, etc. . . introduit de même une hétérogénéité du champ des vitesses, engendrant par les mêmes mécanismes que ci-dessus un mélange, un étalement dans toutes les directions de l'espace des éléments transportés par le fluide.

La dispersion cinématique est donc en fait le résultat de l'existence d'un champ de vitesse réel fort complexe et inconnu, que l'on néglige totalement dans la convection quand on utilise la vitesse fictive moyenne de Darcy (qui suppose que l'ensemble du milieu continu est sujet à l'écoulement). Cette vitesse de Darcy est malheureusement la seule que l'on puisse atteindre macroscopiquement par le biais de la perméabilité; mais elle a cependant l'avantage d'être exacte au niveau de l'intégrale sur une surface donnée pour calculer un bilan des flux.

La décomposition du transfert en terme convectif représentant le déplacement moyen et un terme dispersif intégrant les effets des hétérogénéités est purement arbitraire; le rôle respectif de chacun des termes dépend essentiellement du degré de finesse avec lequel le milieu poreux peut être décrit.

Quelle forme mathématique donner à la dispersion cinématique ? La réponse peut être soit théorique, soit expérimentale.

Le développement de la théorie, essentiellement dû à Taylor, Scheidegger, Bear, Bachmat et Fried, a été établi en considérant une distribution aléatoire dans l'espace de canalicules représentant les conduits à travers les pores du milieu poreux.

La formule mathématique proposée consiste à adopter une loi de transfert par dispersion représentant ces phénomènes de mélange analogue à la loi de Fick:

$$\text{Flux dispersif } \vec{\phi} = -\overline{\overline{D}} \text{ grad } C$$

qui s'applique sur toute la section du milieu, comme la vitesse de Darcy, mais avec un coefficient de dispersion $\overline{\overline{D}}$ qui est:

- un tenseur, supposé être symétrique et du 2^{ème} ordre .

- ayant comme direction principale la direction du vecteur vitesse de l'écoulement (donc lié au fluide et non pas au milieu), les deux autres directions principales étant généralement quelconques, orthogonales à la première,
- enfin, les coefficients du tenseur sont eux-mêmes des fonctions du module de la vitesse d'écoulement.

Si l'on exprime le tenseur de dispersion dans les directions principales d'anisotropie, il se réduit à trois composantes:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{vmatrix}$$

D_L étant le coefficient de dispersion longitudinale (dans le sens de l'écoulement) et D_T le coefficient de dispersion transversale (dans les deux directions orthogonales à la vitesse).

Ce flux dispersif $\overline{\overline{D}} \overrightarrow{\text{grad}} C$ s'ajoutera au flux diffusif $\omega_c \overrightarrow{\text{grad}} C$ au 1^{er} membre de l'équation (9.2.1.2).

La valeur de ces coefficients de dispersion varie avec la valeur du module de la vitesse de Darcy ou de la vitesse microscopique moyenne d'écoulement:

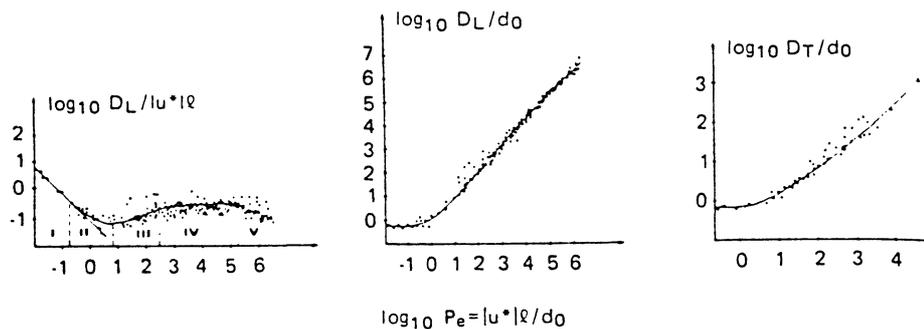
$$|u^*| = \frac{|U|}{\omega_c}$$

On définit pour cela un nombre de Péclet sans dimension:

$$Pe = \frac{|u^*| \sqrt{k}}{d_o} = \frac{|U| \sqrt{k}}{\omega_c d_o}, \text{ ou } Pe = \frac{|u^*| \ell}{d_o}$$

avec: $|u^*|$ = module de la vitesse microscopique moyenne,
 k = perméabilité intrinsèque,
 d_o = coefficient de diffusion moléculaire,
 ℓ = longueur caractéristique du milieu poreux (diamètre moyen des grains ou des pores).

Expérimentalement, au laboratoire de l'I.F.P., O. Pfankuch a vérifié la validité de cette loi de dispersion proposée par la théorie, et a établi la relation empirique liant les coefficients de dispersion au nombre de Péclet. En fonction du nombre de Péclet, on définit cinq régimes d'écoulement et, pour chacun d'eux, une relation empirique entre D_L , D_T et Pe . Ces cinq régimes sont représentés sur la figure suivante:



Ces cinq régimes de dispersion correspondent à des répartitions variables entre les rôles joués par la diffusion moléculaire et la dispersion cinématique:

- I - diffusion moléculaire pure,
- II - superposition,
- III - dispersion cinématique prédominante,
- IV - dispersion cinématique pure,
- V - dispersion cinématique hors du domaine de validité de la loi de Darcy.

Dans le domaine des vitesses usuelles (domaine III et IV, $Pe > 10$), on admet généralement les relations:

$$\begin{aligned} D_L &= \alpha_L |U| \\ D_T &= \alpha_T |U| \end{aligned}$$

α_L et α_T , qui ont la dimension d'une longueur, sont baptisés coefficient de dispersion intrinsèque, ou dispersivité.

α_L en laboratoire, sur colonne de sable, est de l'ordre de quelques centimètres. Sur le terrain, il est de l'ordre du mètre à la centaine de mètres, en fonction du degré d'hétérogénéité de la formation - voir Lallemand-Barrès et al. (1978);

α_T est beaucoup plus petit: entre 1/5 et 1/100 de α_L .

On peut aussi adopter une forme plus générale des coefficients de dispersion, prenant en compte explicitement le coefficient de diffusion moléculaire d , pour étendre la validité du modèle du côté des faibles nombres de Péclet, c'est-à-dire des régimes I et II où la vitesse de Darcy est faible.

$$\left. \begin{aligned} D_L &= \omega_d + \alpha_L |U| \\ D_T &= \omega_d + \alpha_T |U| \end{aligned} \right\} \quad (9.2.1.3)$$

d étant le coefficient de diffusion moléculaire, et ω la porosité totale. Ce terme ne joue un rôle que si $|U|$ est très petit.

L'équation du transfert prenant maintenant en compte la dispersion cinématique, qui se substitue au terme de diffusion, s'écrira:

$$\text{div} (\overline{\overline{D}} \overrightarrow{\text{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} + (\omega - \omega_c) \frac{\partial C'}{\partial t} \quad (9.2.1.4)$$

Dans ce cas, le transfert dispersif cinématique porte bien sur la fraction mobile à concentration C , et non pas sur la fraction immobile à concentration C' .

Si l'on fait maintenant l'hypothèse, pour simplifier, que la concentration C dans la fraction mobile se met instantanément en équilibre avec la concentration C' dans la fraction immobile, par le jeu de la diffusion moléculaire, et vu l'extraordinaire interpénétration des deux fractions l'une dans l'autre, alors on peut admettre que:

$$C = C'$$

et

$$\boxed{\text{div} (\overline{\overline{D}} \overrightarrow{\text{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega \frac{\partial C}{\partial t}} \quad (9.2.1.5)$$

qui est la forme usuelle de l'équation de la dispersion. Si l'on divise par ω la porosité totale, on fera apparaître une vitesse fictive moyenne:

$$\vec{u}' = \frac{\overrightarrow{U}}{\omega}$$

On peut, de plus, diviser les coefficients de dispersion par ω :

$$\overline{\overline{D}}' = \frac{\overline{\overline{D}}}{\omega}$$

soit

$$D_L' = d + \frac{\alpha_L}{\omega} |U|$$

$$D_T' = d + \frac{\alpha_T}{\omega} |U|$$

que l'on peut encore écrire:

$$\begin{cases} D_{L'} = d + \alpha_L |u'| \\ D_{T'} = d + \alpha_T |u'| \end{cases}$$

ce qui montre que les dispersivités α_L et α_T restent les mêmes quelle que soit la forme donnée à l'équation de la dispersion (avec ω au 2^{ème} membre ou non).

Alors l'équation de transport s'écrit:

$$\boxed{\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{u'}) = \frac{\partial C}{\partial t}} \quad (9.2.1.6)$$

qui est la forme classique dans la littérature. Fried propose même de l'écrire:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{C}{\rho} - C \overrightarrow{u'}) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

quand la masse volumique ρ du fluide varie notablement, ce que nous ne supposons pas dans la suite.

A l'inverse, si la fraction fluide immobile est supposée ne pas être envahie par les éléments transportés, on peut admettre que $C' = 0$ et l'équation du transport se réduit à:

$$\boxed{\operatorname{div} (D \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t}} \quad (9.2.1.7)$$

On peut également diviser les deux membres par ω_c pour faire apparaître une vitesse convective fictive moyenne $\frac{\overrightarrow{U}}{\omega_c} = \overrightarrow{u^*}$.

Cette discussion nous montre qu'il vaut mieux, contrairement à l'habitude, conserver la vitesse de Darcy pour le terme convectif, et faire figurer explicitement la (ou les) porosité au 2^{ème} membre de l'équation. Nous reviendrons également sur ce 2^{ème} membre dans la discussion sur l'adsorption (§ 9.2.2.a. 5^{ème} cas).

- *Couplage de l'équation du transport avec celle du mouvement du fluide:*

A l'équation du transport, il faut rajouter celle permettant de calculer la vitesse de Darcy \overrightarrow{U} :

$$\overrightarrow{U} = -\frac{\overline{k}}{\mu} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \rho g \overrightarrow{\operatorname{grad}} z) \quad (4.1.6)$$

qui est l'équation généralisée en pression, car ρ varie avec C . On dispose enfin de l'équation de continuité du fluide avec ses équations d'état:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\rho \overrightarrow{U}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) = 0 \\ \rho = \rho(C) \\ \mu = \mu(C) \\ \overline{D} \text{ fonction de } \overrightarrow{U} \text{ et du coefficient de diffusion moléculaire en milieu poreux } d. \end{cases} \quad (9.1.2.3) \quad (3.2.3)$$

Ces équations sont couplées et doivent donc être résolues simultanément (la vitesse U dépend de la concentration et réciproquement).

- *Simplification de l'équation de la dispersion: hypothèse du traceur:*

L'hypothèse du traceur consiste à découpler l'équation de variation de la concentration de celle donnant la vitesse: la concentration C est supposée si faible que la masse volumique ρ du fluide est pratiquement invariable: alors la vitesse U ne dépend pas de la concentration.

On résout donc à part le problème de l'écoulement, et il ne reste qu'à résoudre l'équation de la dispersion. Celle-ci possède quelques solutions analytiques (voir Bear et § 9.2.3.), mais la résolution doit le plus souvent être numérique, entraînant d'ailleurs pas mal de difficultés d'analyse numérique liées à la discrétisation, en particulier l'apparition d'une "diffusion numérique".

- *Conditions aux limites de l'équation de la dispersion:*

Pour imposer ces conditions à l'équation de la dispersion, il faut bien se souvenir qu'elle comporte deux termes distincts: un terme diffusif et un terme convectif.

La nature d'une limite sera d'abord liée au sens du flux qui la traverse:

- limite à flux entrant: la concentration sur une telle limite sera fixée par la concentration du fluide entrant:

$$C = C_0$$

- limite à flux sortant (par exemple exutoire du milieu géologique vers la surface, c'est-à-dire une nappe superficielle, un plan d'eau douce ou salée, etc...): la concentration du milieu extérieur ne joue pas ici de rôle dominant: on dira que le flux sortant par convection ne varie pas en concentration à la traversée de la limite:

$$\vec{U} \cdot \frac{\partial C}{\partial n} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

on négligera alors le flux dispersif.

- limite hydraulique à flux nul: la vitesse \vec{U} étant alors parallèle à la limite, le flux convectif $U \cdot \frac{\partial C}{\partial n}$ sera toujours nul même si $\frac{\partial C}{\partial n}$ ne l'est pas.

S'il n'y a pas de flux de soluté entrant ou sortant par *diffusion pure* à travers la limite, on écrira:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

Au contraire, s'il y a un phénomène de diffusion connu à travers cette limite, on écrira:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = f$$

- *Choix des coefficients de dispersion:*

Les coefficients de dispersion (ou la dispersivité) peuvent être mesurés sur colonne en laboratoire. Cependant, de tels coefficients ne sont que de peu d'utilité pour prévoir une migration réelle. En effet, sur le terrain, les échelles d'hétérogénéités sont différentes et les coefficients beaucoup plus grands. Il faut donc les mesurer par des expériences de traçage que l'on interprète par des schémas analytiques ou numériques.

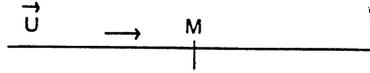
On constate cependant que si l'on change l'échelle des expériences de traçage (échelles d'espace et de temps), on obtient des valeurs différentes des coefficients. Le problème du choix des coefficients pour prévoir des migrations sur de longues distances n'est donc pas entièrement résolu. Après avoir mesuré expérimentalement ces coefficients, à une certaine échelle, il sera nécessaire de simuler la propagation avec des majorants de ces coefficients pour encadrer la migration réelle probable.

Matheron et Marsily (1980) proposent, pour un milieu stratifié, des lois de variation du coefficient de dispersion moyen avec la distance parcourue, qui laissent espérer qu'après un parcours assez grand, on atteindra une valeur asymptotique constante. Mais la distance de parcours nécessaire peut être assez grande, 500 m pour un aquifère alluvial pour fixer les idées. Un tel effet a été observé sur le terrain par Dieulin (1980).

Remarque: On peut également mettre en doute, pour les forts coefficients de dispersion longitudinale, la validité de la théorie qui ne distingue pas le sens de la circulation convective et le sens du gradient de

concentration pour déterminer le flux dispersif. S'il s'agit seulement de la diffusion moléculaire, phénomène isotrope dans toutes les directions, on conçoit bien qu'il n'y ait pas lieu de distinguer le sens de l'écoulement. Mais quand il s'agit de dispersion cinématique, la chose est différente.

Considérons, en effet, un axe ℓ (longitudinal) parallèle à la direction de la vitesse d'écoulement, que nous supposons orientée dans le même sens que l'axe ℓ :



En un point M , les flux dispersifs et convectifs sont:

$$\phi_{\ell} = -\alpha_L |U| \frac{\partial C}{\partial \ell} + CU$$

On peut supprimer le signe valeur absolue et mettre la vitesse U en facteur:

$$\phi_{\ell} = -U \left(\alpha_L \frac{\partial C}{\partial \ell} - C \right)$$

Si $\frac{\partial C}{\partial \ell} < 0$, c'est-à-dire que la concentration diminue vers l'aval (cas de l'élément qui se propage dans un milieu propre, propagation du front de la migration), ce flux résultant ϕ_{ℓ} sera toujours positif, c'est-à-dire que convection et dispersion font se propager l'élément vers l'aval. La dispersivité α_L joue donc bien son rôle d'accélérateur de la propagation par le jeu de l'hétérogénéité des vitesses.

Mais si $\frac{\partial C}{\partial \ell} > 0$, qui est le cas du balayage par un fluide propre d'un milieu contaminé, alors l'importance relative de $\alpha_L \frac{\partial C}{\partial \ell}$ et C détermine le signe de ϕ_{ℓ} : pour de forts gradients et de fortes dispersivités, ϕ_{ℓ} peut devenir négatif, ce qui signifie que les éléments transportés se mettent à remonter le courant et à cheminer vers l'amont: on voit mal, physiquement, comment la dispersion cinématique, qui est somme toute une hétérogénéité des vitesses réelles par rapport à la vitesse convective, pourrait propager des éléments vers l'amont: les vitesses réelles dans le milieu poreux sont vraisemblablement toujours plus orientées vers l'aval que vers l'amont. Le seul mécanisme physique que l'on pourrait mettre en avant pour expliquer une remontée des éléments transportés dans le courant serait la diffusion moléculaire, qui s'écrirait alors:

$$\phi_{\ell} = -\omega_d \frac{\partial C}{\partial \ell} + CU$$

ce qui ferait dépendre la valeur du coefficient de dispersion du sens du gradient par rapport à la vitesse.

Cet effet est atténué si l'on fait dépendre le coefficient de dispersion de la distance parcourue (Dieulin, 1980).

b) Milieu fissuré

Il n'y a pas, pour le milieu fissuré, de théorie particulière élaborée pour le transport. Les trois phénomènes (convection, diffusion, dispersion) cités plus haut jouent également en milieu fissuré, où le phénomène de la porosité secondaire éventuelle des blocs prend une importance toute particulière si elle existe.

- Convection:

La convection dans le réseau des fissures aura lieu exactement comme dans les milieux poreux. Utilisant la vitesse de Darcy, on écrira:

$$-\operatorname{div}(C\vec{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t}$$

pour identifier la convection.

Si l'on compare un milieu poreux de perméabilité 10^{-3} m/s et de porosité 0,20 à un milieu fissuré ayant la même perméabilité équivalente, il suffit d'une fissure de 0,02 mm avec un espacement de 1 m pour obtenir le même flux de Darcy, ce qui donne une porosité du milieu fissuré de $2 \cdot 10^{-5}$: la porosité cinématique ω_d est dix mille fois plus petite dans le milieu fissuré, ou, si l'on veut, la vitesse microscopique moyenne dans la fissure est dix mille fois plus élevée que dans le milieu poreux ayant globalement la même perméabilité.

Le transfert convectif sera donc beaucoup plus rapide en milieu fissuré qu'en milieu poreux si la matrice de la roche est imperméable, non poreuse et compacte.

- *Diffusion et dispersion:*

Ces deux phénomènes prendront également naissance dans les milieux fissurés, le premier par l'agitation moléculaire, le second par l'hétérogénéité des vitesses au sein d'une fissure (profil parabolique des vitesses, comme dans un pore) ainsi que l'hétérogénéité des vitesses de fissure à fissure (degré d'ouverture différent) et enfin, mélange et dispersion transversale par rencontre de fissures de directions différentes.

Il y a cependant très peu de valeurs connues des coefficients de dispersion en milieu fissuré. Un des rares cas connus est celui des basaltes de Hanford, où un rejet accidentel de tritium a pollué la nappe sur près de 15 km. Une étude, réalisée par Ahlström et autres (Batelle) donne:

$$\alpha_L = 30 \text{ m}$$

$$\alpha_T = 20 \text{ m}$$

Une autre étude de pollution par des déchets radioactifs a été réalisée par Robertson en 1974 (cité par Fried, 1975) à la station expérimentale de Snake River (Idaho). L'aquifère est constitué de basaltes fissurés et de couches de sédiments intercalaires. Le calage du modèle (sur des concentrations en chlorures et en tritium) a été obtenu pour des coefficients:

$$\alpha_L = 91 \text{ m}$$

$$\alpha_T = 137 \text{ m}$$

(noter $\alpha_T > \alpha_L$)

les polluants s'étant étalés sur près de 10 km en 10 ans.

Grove cite une expérience de traçage au tritium dans 150 m d'épaisseur de roches fissurées. Avec un puits d'observation à 600 m du point de traçage, il obtient un α_L de 150 m et une porosité de $8 \cdot 10^{-4}$. Pour ces calcaires fissurés, il cite $\alpha_L = 12$ m.

- *Porosité secondaire:*

Nous entendons par là le cas où la matrice de la roche qui est découpée par des fissures ne peut être considérée comme imperméable et compacte: des éléments transportés vont y migrer.

Reprenant le raisonnement que nous avons fait pour le milieu poreux, nous pouvons écrire l'équation de transport en faisant intervenir deux concentrations C et C' :

$$\text{div} (\overline{\overline{D}} \text{grad} C - C \overline{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} + (\omega - \omega_c) \frac{\partial C'}{\partial t}$$

ω_c correspond ici à la porosité cinématique des fissures, soit, pour fixer les idées, 80 à 90% du volume de celles-ci;

$\omega - \omega_c$ correspond à la porosité de l'eau immobile dans les fissures et l'eau contenue dans la matrice;

C correspond alors à la concentration du fluide dans les fissures;

C' correspond à une concentration "moyenne" dans la matrice.

Éliminons le cas trivial où la migration des fissures à la matrice est si rapide, ou le milieu si finement fissuré, que l'on peut, à chaque instant, supposer que la concentration C' dans chaque bloc de matrice est égale à celle du fluide circulant dans les fissures. Ce cas extrême correspondrait, comme nous l'avons vu

pour le milieu poreux, à utiliser une porosité pour le transport qui soit égale à la porosité totale (fraction mobile dans les fissures + fraction immobile + porosité totale de la matrice) de la roche.

1^{ère} hypothèse: matrice rocheuse, mais à perméabilité quasi-nulle: Dans ce cas, le seul mécanisme de migration dans la matrice sera la diffusion moléculaire. Dans chaque bloc isolé par des fissures, nous aurons à résoudre l'équation de la diffusion moléculaire:

$$\text{div} (\omega' d \overrightarrow{\text{grad}} C') = \omega' \frac{\partial C'}{\partial t}$$

ω' étant la porosité totale de la matrice. Cette équation aura pour conditions aux limites les valeurs de la concentration C dans les fissures, elle-même variable avec le temps. On calculera alors le flux moyen échangé avec la fissure par unité de surface de contact entre les deux milieux:

$$\vec{\phi} = -\omega' d \overrightarrow{\text{grad}} C' \Big|_{\text{sur le contact}}$$

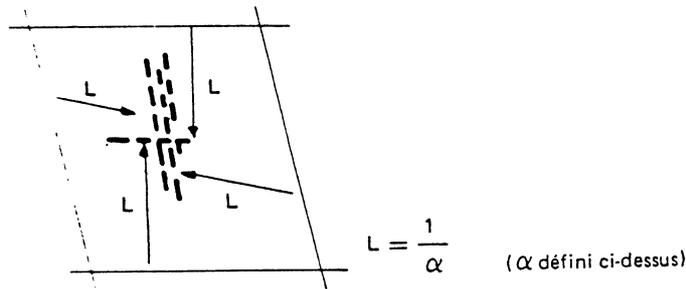
terme que l'on introduit comme terme source dans l'équation du transport dans les fissures:

$$\text{div} (\overline{D} \overrightarrow{\text{grad}} C - C \overline{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} + \alpha \phi$$

α étant le rapport $\frac{\text{aire des plans de fissures présents}}{\text{volume de milieu}}$

(une fissure compte pour deux surfaces par ses deux plans).

Pour simplifier ces calculs, on résoudra schématiquement l'équation de diffusion dans un bloc en la ramenant à une dimension, en donnant au bloc une demi-dimension moyenne égale au demi-espacement moyen des fissures dans toutes les directions de l'espace, mais respectant le volume de la matrice:



L'équation monodimensionnelle de la diffusion, avec une condition de flux nul à la distance L et de concentration imposée au plan de fractures, sera résolue soit numériquement, soit analytiquement (donnant alors à ϕ une forme d'intégrale de convolution de la concentration C avec la solution analytique). Compte tenu de la complexité ainsi introduite, un tel calcul n'est envisageable qu'à une dimension, peut-être deux. Une solution sphérique peut également être envisagée.

2^{ème} hypothèse: matrice poreuse et perméable: Notons tout de suite que si cette perméabilité est de l'ordre de celle des fissures, le milieu fissuré aura une perméabilité équivalente tenant compte explicitement de la perméabilité de la matrice qui existe dans les expressions données au § 4.1.f.

Le transport se réalisera simultanément dans les deux milieux, et pourra être représenté par un coefficient de dispersion plus élevé, tenant compte de cette hétérogénéité systématique du champ de vitesses (il faudra déterminer ce coefficient par l'expérience).

Le problème plus difficile est le cas où cette perméabilité de la matrice, sans être nulle ou négligeable, est faible devant celle des fractures. On peut alors proposer (O'Neill et Pinder, 1977; Lefebvre du Prey, 1974) de résoudre une seule équation d'écoulement en charge en supposant qu'en régime permanent il y a égalité des pressions dans les deux milieux, en utilisant la perméabilité équivalente globale:

- d'en déduire deux champs de vitesses, dans chacun des milieux, en appliquant la loi de Darcy dans chaque milieu avec sa perméabilité propre (on suppose que les deux milieux sont continus et superposés);
- d'écrire deux équations de transport dans chacun des milieux, avec la vitesse de Darcy et la porosité qui leurs sont propres;
- de coupler ces deux équations de transport au niveau de termes d'échange:
 - . un terme d'échange convectif lié à la vitesse de Darcy dans la matrice; si C est la concentration dans les fractures, et C' dans la matrice, le terme sera:

$$-\alpha U' C \quad \text{dans l'équation du transport } C'$$

$$+\alpha U' C' \quad \text{dans l'équation du transport de } C$$

α étant un coefficient d'échange;

- . un terme d'échange dispersif lié à la différence des concentrations C et C' .

9.2.2. Lois des interactions entre phase immobile et éléments transportés et modifications physico-chimiques des éléments.

Notre objet est ici d'introduire les mécanismes qui peuvent rendre la migration des éléments dans les roches un phénomène non conservatif, c'est-à-dire tendre au non respect de la loi de conservation de la matière au cours du transport. Nous traiterons successivement du cas des milieux poreux et des milieux fissurés.

a) Milieu poreux

La phase immobile comprend essentiellement la phase solide, mais également le liquide immobile lié au solide par les forces d'attraction moléculaire, et c'est dans cet esprit que nous avons renvoyé le lecteur au présent paragraphe pour traiter de cette interaction.

Plusieurs mécanismes sont communément cités dans l'étude de la migration des éléments (Jackson, 1981):

• Mécanisme physique:

La filtration des éléments par les pores du milieu: Greenberg et Mitchell donnent, dans l'argile, les estimations suivantes:

- diamètre des particules d'argiles: 20.000 Å (Å = Ångstrom = 10^{-10} m), et parfois bien plus faible;
- espacement des lits des minéraux argileux: 10 Å;
- dimension des plus petits ions solubles, tels que Na^+ et Cl^- : 1 à 10 Å en diamètre;
- dimension des grandes molécules organiques de poids moléculaire élevé: chaîne de polyéthylène glycol de poids 20.000 et de longueur jusqu'à 500 Å.

On peut donc admettre que la filtration physique par les minéraux argileux ne peut jouer que pour les très gros ions, et surtout pour les molécules de complexes formées par la réunion de plusieurs ions.

Certains colloïdes peuvent cependant être retenus, en quelque sorte, par sédimentation dans le milieu, même si leur diamètre est inférieur à celui des pores.

• Mécanismes géochimiques:

- complexation des ions pour former des molécules électriquement neutres;
- réaction acide/base en fonction du pH de la solution et des roches traversées;
- réaction d'oxydation-réduction qui conditionne l'état de valence des ions transportés;
- précipitation-dissolution pouvant immobiliser ou mettre en solution des éléments;
- adsorption-désorption limitée par définition, sensu stricto, aux seuls échanges ioniques (cations très principalement) ayant lieu sur la surface des minéraux argileux ou colloïdaux.

• Mécanismes radiologiques:

Un ordre de grandeur de la capacité d'adsorption maximum des minéraux argileux est environ 1/10 de leur poids.

1^{er} cas: la cinétique de l'adsorption est instantanée.

On admet alors que F et C sont toujours en équilibre et reliés par une relation où le temps n'intervient pas. Les expériences menées jusqu'ici à l'adsorption (pas encore à la désorption) semblent montrer que, pour les corps et les minéraux argileux, le temps d'obtention de l'équilibre est, à quelques pour cent près, de quelques minutes, c'est-à-dire effectivement négligeable pour les problèmes courants.

Dans le cas général, il faut prendre en considération l'ensemble des éléments transportés et calculer les concentrations C_i et F_i de chacun d'eux. On écrit donc l'équation du transport habituelle:

$$\text{div} (\overline{D} \text{grad} C_i - C_i \overline{U}) = \omega \frac{\partial C_i}{\partial t} + (1 - \omega) \rho_s \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

Ensuite, on exprime que la somme des concentrations adsorbées est égale à la capacité totale d'échange de la roche:

$$\sum_1^M F_i = F_T \quad M = \text{nombre d'éléments présents}$$

Enfin, on exprime la sélectivité de l'adsorption pour certains éléments par une relation, supposée instantanée et réversible (c'est-à-dire en particulier qui ne représente pas la fixation irréversible):

$$\frac{F_i}{C_i} \times \frac{C_j}{F_j} = K_i^j$$

où K_i^j est le coefficient d'adsorption sélective des éléments i et j . Les coefficients K_i^j ne sont, bien sûr, pas indépendants entre eux.

On peut alors résoudre le système d'équations ainsi formé.

Dans le cas où certains des éléments transportés sont en très faible concentration, on fait l'hypothèse que l'adsorption de ces éléments ne modifie pas sensiblement le rapport F_j/C_j des autres éléments présents en quantité notable. Ce rapport étant constant, il vient:

$$\boxed{\frac{F_i}{C_i} = K_i^j \frac{F_j}{C_j} = \text{constante} = K_d}$$

Le coefficient K_d est appelé *coefficient de distribution* de l'élément i par rapport au milieu poreux. Il suppose que l'adsorption est linéaire, réversible et instantanée. Comme K_d peut varier avec la température, on l'appelle aussi la pente de l'isotherme d'adsorption. Sa dimension est $[L^3 M^{-1}]$, on l'exprime généralement en ml/g. Il vient alors:

$$F_i = K_d C_i$$

$$\text{div} (\overline{D} \text{grad} C_i - C_i \overline{U}) = [\omega + (1 - \omega) \rho_s K_d] \frac{\partial C_i}{\partial t} = \omega \left[1 + \frac{1 - \omega}{\omega} \rho_s K_d \right] \frac{\partial C_i}{\partial t} \quad (9.2.2.2)$$

On appelle généralement le terme:

$$R = 1 + \frac{1 - \omega}{\omega} \rho_s K_d \quad \text{sans dimension} \quad (9.2.2.3)$$

le "coefficient de retard" dû à l'adsorption. Il s'introduit donc comme un coefficient multiplicateur de la porosité, qui modifie la vitesse apparente du déplacement:

- décroissance radioactive (disparition d'éléments);
- filiation entraînée par cette décroissance (apparition d'éléments nouveaux).

L'ensemble de ces mécanismes se traduit par un "terme source" dans l'équation du transport, traduisant la non-conservation de la matière lorsque l'on fait le bilan des flux entrants et accumulés dans un volume D , comme nous l'avons vu au paragraphe 9.2.1. Nous l'écrivons:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega \frac{\partial C}{\partial t} + Q \quad (9.2.2.1)$$

Le terme source, Q , d'après la façon dont a été établi le bilan dans un volume D , représente:

- une disparition d'éléments s'il est positif,
- un apport d'éléments s'il est négatif,
- il s'exprime en *masse* de l'élément considéré, amené (ou supprimé) par *par unité de volume de milieu poreux et par unité de temps*.

Nous allons tenter de passer en revue les lois actuellement connues pouvant permettre d'estimer ce terme source:

- . filtration = on ne la distingue pas de l'adsorption-désorption - voir ci-dessus;
- . réactions géochimiques = si les lois d'équilibre chimique de l'ensemble des éléments transportés en présence des éléments de la roche sont connues, on peut estimer ces termes. Ce travail est cependant très complexe, et relève de l'analyse géochimique fine de la solution et du milieu.

Dans le cas qui nous intéresse, on fera l'hypothèse que l'équilibre chimique se réalise instantanément dans le milieu, vu la lenteur des écoulements. Voir les travaux de Michard à Paris VII, de Tardy à Toulouse ou de Helgeson à Berkeley.

- . adsorption et filtration = la fixation d'éléments en solution sur les particules minérales conduit à définir une quantité d'éléments liés à la phase solide. On utilise généralement une concentration massique F , représentant la masse d'éléments adsorbés par unité de masse du solide. A un instant donné, dans l'unité de volume de milieu poreux, la masse de solide est $(1 - \omega)\rho_s$ (où ρ_s = masse volumique du solide et ω est la porosité totale), et la masse d'éléments liés au solide est donc $(1 - \omega)\rho_s F$.

Le terme source à introduire dans l'équation sera la variation de cette masse par unité de volume dans l'unité de temps:

$$Q = (1 - \omega)\rho_s \frac{\partial F}{\partial t}$$

Le problème de l'adsorption est de préciser la relation existant entre les concentrations F et C .

i) Mécanismes d'échanges d'ions

La capacité d'adsorption de certains minéraux ou colloïdes est due (Jackson, 1981) à l'existence de charges électriques non neutralisées à la surface et/ou à l'intérieur de ces minéraux. Des ions de charge opposée viennent alors s'y fixer, créant une "double couche électrique" qui peut appartenir à l'un des deux types suivants:

Type 1: présence d'imperfections ou de substitutions dans le réseau cristallin du minéral, engendrant des déséquilibres électriques positifs ou négatifs. On appelle alors la couche électrique fixe la surface du minéral, et la couche électrique mobile les ions de charge opposée attirés par la couche fixe.

Type 2: l'adsorption spécifique de certains ions par un minéral initialement non chargé à sa surface crée une couche électrique fixe, sur laquelle viennent se fixer d'autres ions de charge opposée, constituant la couche mobile.

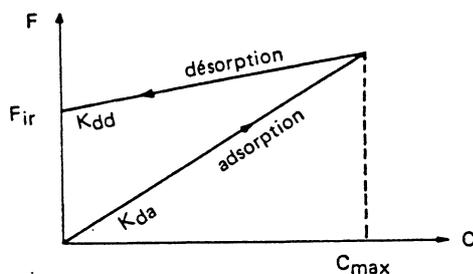
La vermiculite et la montmorillonite ont, par exemple, des doubles couches de type 1. D'autres argiles, les hydroxydes métalliques et les colloïdes organiques et inorganiques (silice par exemple) ont des doubles couches de type 2. Ces derniers sont bien plus sensibles à l'action du pH de l'eau.

$$\operatorname{div} (\bar{D} \operatorname{grad} C - C \bar{U}) = \omega R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9.2.2.4)$$

Sous cette hypothèse, on peut calculer le déplacement de chaque élément indépendamment de ses voisins. S'il n'y a pas d'adsorption, $R = 1$.

2^{ème} cas: adsorption instantanée non entièrement réversible

Si un tel phénomène se manifeste, on obtient des isothermes d'adsorption-désorption ayant, par exemple, l'allure suivante:



la quantité fixée de façon irréversible pouvant alors dépendre de la concentration maximum atteinte C_{\max} .

La représentation de ce phénomène peut être envisagée sur modèle numérique, au prix d'un effort de calcul assez considérable. On comparera en effet, à chaque pas de temps, et pour chaque maille du modèle, la concentration nouvelle calculée $C_{t+\Delta t}$, à l'ancienne concentration C_t . Supposons, par exemple, que l'on commence par une phase d'adsorption:

Si $C_{t+\Delta t} > C_t$

alors il faut utiliser, pour la maille considérée, le coefficient de retard:

$$R_a = 1 + \frac{1-\omega}{\omega} \rho_s K_{da}$$

K_{da} étant la pente de l'isotherme d'adsorption. Mais si:

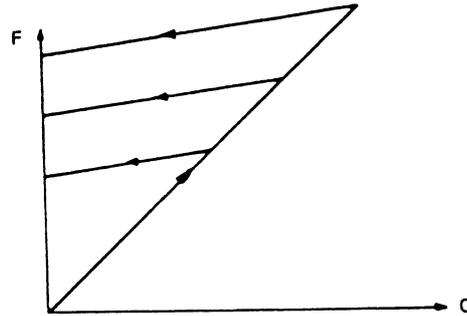
$C_{t+\Delta t} < C_t$

alors il faut utiliser:

$$R_d = 1 + \frac{1-\omega}{\omega} \rho_s K_{dd}$$

K_{dd} étant la pente de l'isotherme de désorption.

On peut noter que le terme constant F_{ir} s'élimine lors de la dérivation (en désorption, on écrirait $F = F_{ir} + K_{dd}C$, mais $\frac{\partial F}{\partial t} = K_{dd} \frac{\partial C}{\partial t}$), ce qui montre que seule la pente de l'isotherme de désorption est importante à déterminer, dans la mesure où les diverses isothermes de désorption sont bien, en première approximation au moins, des parallèles entre elles, en fonction de la concentration maximale atteinte:



Il faut aussi noter que le danger d'utiliser cette irréversibilité vient de ce qu'elle peut être due à une *cinétique de désorption*. Il se peut que, pour un temps d'équilibre très long, on revienne lentement à l'isotherme unique d'adsorption. Si l'on utilise, pour les calculs, une désorption irréversible, on risque donc de commettre une erreur qui va à l'encontre de la sécurité: on pose là le problème de la validité à très long terme des expériences faisant intervenir une cinétique de réaction et mesurées en laboratoire sur des durées nécessairement faibles.

3^{ème} cas: isotherme d'adsorption non linéaire

Dans le cas où chaque élément se déplace en solution indépendamment de ses voisins, on a proposé d'autres relations instantanées entre F et C , au lieu de l'isotherme linéaire. ce sont les isothermes:

- du 2^{ème} degré: $F = K_1 C - K_2 C^2$, $K_1, K_2 > 0$
- de Langmuir: $F = \frac{K_1 C}{1 + K_2 C}$, $K_1, K_2 > 0$
- de Freundlich: $F = K_1 C^{1/n}$, $K_1 > 0, n \geq 1$
- exponentielle: $C = K_1 F e^{K_2 F}$, $K_1, K_2 \geq 0$

De plus, ces constantes peuvent dépendre du sens de l'échange (adsorption ou désorption) si le phénomène n'est pas strictement réversible.

4^{ème} cas: cinétique d'adsorption-désorption non instantanée

Il faut alors connaître la loi de variation dans le temps de F en fonction de C . Devant la complexité du problème, on découple généralement le phénomène numériquement:

- connaissant C_i et F_i au début du pas de temps, on calcule $F_{i+\Delta t}$ à la fin du pas de temps, d'après la loi de la cinétique de réaction, en supposant C_i constant sur le pas de temps:

$$Q = (1 - \omega)\rho_s \frac{F_{i+\Delta t} - F_i}{\Delta t}$$

- on introduira alors ce terme source, supposé constant sur le pas de temps, dans l'équation du transport.

La concentration F est, en quelque sorte, un terme explicite en retard d'un pas de temps sur la concentration C .

Si l'on veut améliorer la précision, il faut alors calculer plusieurs fois C et F sur le même pas de temps, en itérant les calculs de cinétique et de transport.

Par exemple, on peut supposer que la cinétique d'adsorption est linéaire (Kipp, 1978). On écrit alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) &= \omega \frac{\partial C}{\partial t} + (1 - \omega)\rho_s \frac{\partial F}{\partial t} && \text{(dans la phase liquide)} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= W(K_d C - F) && \text{(dans la phase solide)} \end{aligned}$$

W est la constante de cinétique chimique linéaire de l'adsorption. On résout successivement ces deux équations.

5^{ème} cas: relation entre l'adsorption et la concentration C' dans la fraction fluide immobile

Nous avons écrit au § 9.2.1.a. une équation de transport (9.2.1.4) faisant intervenir une concentration C' dans la fraction immobile. Nous pouvons également y ajouter un terme d'adsorption. Il vient:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega_c \frac{\partial C}{\partial t} + (\omega - \omega_c) \frac{\partial C'}{\partial t} + (1 - \omega) \rho_s \frac{\partial F}{\partial t}$$

Si l'on admet qu'il existe une isotherme d'adsorption linéaire $F = K_d C$, et que la relation entre C et C' est également linéaire:

$$C' = K' C$$

il vient:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega_c \left(1 + \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c} K' + \frac{1 - \omega}{\omega_c} \rho_s K_d \right) \frac{\partial C}{\partial t}$$

On fait ainsi apparaître un nouveau coefficient de retard, où l'adsorption et la rétention dans la phase fluide immobile sont réunies.

Or, dans la pratique, on mesure le coefficient K_d par différence: partant d'une concentration C_1 connue dans la phase fluide, on y introduit un certain poids de roche*, puis on mesure la concentration C_2 dans la phase liquide restante: la quantité adsorbée en est déduite par différence. Mais, en fait, la quantité qui a disparu de la phase mobile (que seule on peut mesurer) comprend également la quantité retenue dans le liquide immobile lié au solide: le coefficient K_d obtenu tient donc explicitement globalement compte de la quantité retenue dans le fluide immobile, et, dès lors que l'on introduit l'adsorption linéaire et instantanée, il est inutile de prendre en compte la concentration C' dans la phase immobile.

ii) Décroissance radioactive:

En l'absence de transport, la décroissance radioactive s'exprime par l'équation différentielle:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda C$$

qui, intégrée, donne:

$$C = C_o e^{-\lambda t} \quad (\text{décroissance exponentielle})$$

La période T est définie par $C/C_o = 1/2$, ce qui donne:

$$e^{-\lambda T} = 1/2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\operatorname{Log} 2}{T} = \frac{0,693}{T} \quad (9.2.2.5)$$

La décroissance radioactive fait donc "disparaître", par unité de temps, la masse λC par unité de volume de la phase liquide. Pour la ramener à l'unité de volume du milieu poreux, il faut donc la multiplier par ω . L'équation du transport s'écrira:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \lambda C \right) \quad (9.2.2.6)$$

S'il existe une concentration F dans la phase adsorbée, celle-ci va également décroître selon la même loi:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda F$$

* qu'il ne faut surtout pas broyer, pour ne pas augmenter la surface de contact fluide-solide.

Cette disparition est ici exprimée en masse par unité de temps et par unité de masse de solide. Pour la ramener à l'unité de volume de milieu poreux, il faut la multiplier par $(1 - \omega)\rho_s$. On écrira donc:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \lambda C \right) + (1 - \omega)\rho_s \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \lambda F \right) \quad (9.2.2.7)$$

Dans le cas d'adsorption linéaire et réversible ($F = K_d C$), ceci s'écrit:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega R \frac{\partial C}{\partial t} + \omega R \lambda C \quad (9.2.2.8)$$

iii) Filiation:

Si un élément C_i disparaît par décroissance radioactive, c'est qu'il engendre par filiation un élément C_j différent*. Pour l'équation du transport de l'élément C_j , le terme source sera donc une apparition. On écrira:

$$\operatorname{div} (\overline{D} \overrightarrow{\operatorname{grad}} C_j - C_j \overrightarrow{U}) = \omega \frac{\partial C_j}{\partial t} - \omega \lambda_i \frac{M_j}{M_i} C_i$$

$\frac{M_j}{M_i}$ étant le rapport des masses des éléments i et j si elles sont différentes. On généralise facilement au cas de l'adsorption.

L'équation du transport de j doit donc être résolue après celle de i , le problème étant celui de la concordance des pas de temps de calcul pour les deux éléments.

b) Milieu fissuré

L'ensemble des phénomènes qui ont été cités pour les milieux poreux peut intervenir de la même façon pour les milieux fissurés.

Le seul point qu'il y ait lieu de distinguer ici est le cas de l'adsorption dans le plan des fractures, quand la matrice rocheuse est supposée imperméable et non poreuse, c'est-à-dire où les éléments transportés ne pénètrent pas en pratique.

Il faut alors déterminer expérimentalement un coefficient de distribution ramené à l'unité de surface brute de la fissure. En effet, on peut définir conceptuellement une "concentration" W adsorbée par la fracture exprimée en masse d'élément retenu par unité de surface de fracture.

Pour ramener cette quantité W d'éléments adsorbée à l'unité du terme source qui est, par définition, la variation de masse de l'élément par unité de volume de milieu fissuré équivalent et par unité de temps, il faut multiplier W par le rapport α que nous avons déjà défini:

$$\alpha = \frac{\text{Aire des plans de fissure présents}}{\text{volume du milieu}}$$

(Notez que nous avons défini α en comptant une fissure pour les deux plans de ses lèvres.)

Il vient alors, pour le terme source d'adsorption:

$$Q = \alpha \frac{\partial W}{\partial t}$$

Si l'on admet qu'il existe encore une relation linéaire entre cette concentration W et la concentration C dans la solution:

* Dans ce qui suivra, C_j pourra être le petit-fils de C_i par le jeu de plusieurs réactions nucléaires si les périodes des éléments intermédiaires sont très courtes par rapport à celle de C_j , et qu'en pratique, seuls C_i et C_j se trouvent en présence.

$$W = K_a C$$

où K_a , coefficient de distribution de fracture, a la dimension de l'unité de longueur (volume/surface).

L'équation de transport s'écrit:

$$\text{div} (\overline{D} \overrightarrow{\text{grad}} C - C \overrightarrow{U}) = \omega \left(\frac{\alpha K_a}{\omega} \right) \frac{\partial C}{\partial t}$$

avec le "coefficient de retard":

$$R = 1 + \frac{\alpha K_a}{\omega} \quad (\text{sans dimension})$$

Pour mesurer expérimentalement K_a sur une carotte contenant une fracture, on opérera comme pour le milieu poreux, par différence, mais en rapportant la quantité W fixée sur les plans de fissures à la surface de la fissure (c'est-à-dire deux fois la dimension de celle-ci si les deux faces de la fissure sont mises en contact avec la solution).

9.2.3. Solutions analytiques de l'équation de la dispersion

a) Si l'on se place dans un cas monodimensionnel en étudiant le déplacement d'un polluant dans un milieu semi-infini, on connaît une solution analytique de l'équation de la dispersion, avec les conditions initiales et aux limites suivantes:

- $C(x) = 0, \forall x > 0, t = 0$
- $C(0) = C_0, t > 0$
- hypothèse du traceur, vitesse \overrightarrow{U} constante pour l'écoulement directionnel
- coefficient de dispersion $D = \alpha \left| \overrightarrow{U} \right|$ constant (dispersion longitudinale seule dans ce problème à une dimension).

$$C = C_0$$

à $t = 0$

Equation:
$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} = \omega R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9.2.3.1)$$

Cette équation est à une dimension identique à (9.2.1.5 ou 7) si $R = 1$, ou à (9.2.2.4.) s'il y a adsorption. R est alors le "coefficient de retard" (9.2.2.3).

Solution:
$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\text{erfc} \left(\frac{x - \frac{U}{\omega R} t}{2\sqrt{Dt/\omega R}} \right) + \exp \left(\frac{Ux}{D} \right) \text{erfc} \left(\frac{x + \frac{U}{\omega R} t}{2\sqrt{Dt/\omega R}} \right) \right] \quad (9.2.3.2)$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire (voir § 8.5.)
 \exp est la fonction exponentielle.

Pour x donné, au bout d'un certain temps, le second terme devient négligeable devant le premier, et l'expression s'écrit:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \text{erfc} \left(\frac{x - \frac{U}{\omega R} t}{2\sqrt{Dt/\omega R}} \right) = \frac{C_0}{\sqrt{\Pi}} \int_v^{+\infty} e^{-r^2} dr \quad \text{où} \quad v = \frac{x - \frac{U}{\omega R} t}{2\sqrt{Dt/\omega R}}$$

La solution (9.2.3.2) est représentée sur la Pl.10 en fonction des trois paramètres adimensionnels:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{Ut}{\omega R x} & \text{ en abscisse} \\ C/C_o & \text{ en ordonnée} \\ \eta = \frac{D}{Ux} & \text{ paramètres des courbes} \end{aligned}$$

b) Si l'on rajoute la décroissance radioactive (équation 9.2.2.6 ou 8), on obtient (Bear, 1979):

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} = \omega R \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \lambda C \right) \quad (9.2.3.3)$$

λ coefficient de décroissance exponentielle (9.2.2.5) et R coefficient de retard dû à l'adsorption (9.2.2.3).

Solution:

$$\begin{aligned} C(x, t) = \frac{C_o}{2} \exp \left(\frac{Ux}{2D} \right) & \left\{ \exp(-\beta x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x - t \sqrt{\left(\frac{U}{\omega R}\right)^2 + \frac{4\lambda D}{\omega R}}}{2\sqrt{Dt/\omega R}} \right) \right. \\ & \left. + \exp(\beta x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + t \sqrt{\left(\frac{U}{\omega R}\right)^2 + \frac{4\lambda D}{\omega R}}}{2\sqrt{Dt/\omega R}} \right) \right\} \end{aligned}$$

où
$$\beta = \sqrt{\left(\frac{U}{2D}\right)^2 + \frac{\lambda \omega R}{D}} \quad (9.2.3.4)$$

c) Si l'on injecte une masse dM de traceur de façon instantanée et ponctuelle dans un aquifère en écoulement parallèle à deux dimensions, x étant la direction de l'écoulement et l'origine des coordonnées au point d'injection, on obtient (Bear, 1979):

$$D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} = \omega R \frac{\partial C}{\partial t} \quad (9.2.3.5)$$

Solution:

$$dC(x, y, t) = \frac{dM}{4\pi t \sqrt{D_L D_T / \omega^2 R^2}} \exp \left(-\frac{\left(x - \frac{Ut}{\omega R}\right)^2}{4D_L t / \omega R} - \frac{y^2}{4D_T t / \omega R} \right) \quad (9.2.3.6)$$

où D_L et D_T sont les coefficients de dispersion longitudinale et transversale, et R le coefficient de retard (9.2.2.3).

Si l'injection à l'origine est continue (débit de fluide Q à la concentration C_o , Q étant toutefois suffisamment petit pour que l'écoulement ne soit pas perturbé), on obtient la solution par convolution:

$$C(x, y, t) = \frac{C_o Q}{4\pi \sqrt{D_L D_T / \omega^2 R^2}} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp \left(-\frac{\left(x - \frac{U(t-\tau)}{\omega R}\right)^2}{4D_L(t-\tau)/\omega R} - \frac{y^2}{4D_T(t-\tau)/\omega R} \right) d\tau$$

Si on fait tendre t vers l'infini, on obtient:

$$C(x, y, \infty) = \frac{C_o Q}{2\pi \sqrt{D_L D_T / \omega^2 R^2}} \exp \left(\frac{xU}{2D_L} \right) K_o \left(\sqrt{\frac{U^2}{4D_L \omega R} \left(\frac{x^2}{D_L / \omega R} + \frac{y^2}{D_T / \omega R} \right)} \right)$$

où K_o est la fonction de Bessel modifiée de 2^{ème} espèce et d'ordre zéro.

ici, Q est le débit injecté par unité d'épaisseur de l'aquifère.

9.3. TRANSFERT DE CHALEUR EN MILIEU POREUX

A première vue, le transport de chaleur en milieu poreux doit obéir à trois mécanismes distincts:

- conduction dans la matrice solide,
- transport par la phase fluide,
- échange de chaleur entre les deux phases, en fonction de leur différence de température.

Le premier phénomène se traduirait par une équation de la chaleur portant sur la température moyenne $\langle \theta_s \rangle$ du solide. Le second serait semblable à l'équation de la dispersion pour le fluide, la température du fluide $\langle \theta \rangle$ jouant le rôle de la concentration. Le troisième s'apparenterait aux mécanismes d'échanges entre phase solide et liquide que nous avons examinés.

Dans la pratique, cependant, sauf dans de rares exceptions, on fait l'hypothèse que la température du solide et celle du fluide s'égalisent presque instantanément, et qu'il n'existe qu'une seule température θ dans le milieu poreux. Houpeurt et al. (1965) ont montré en effet que cette égalisation des températures s'effectue en moins d'une minute, pour un milieu de granulométrie inférieure à 1 mm, ou en moins de 2 heures pour 10 cm.

Tout ce que nous venons de dire pour le transport d'un élément en solution se transpose alors au transport de la chaleur en milieu poreux.

On calcule donc une température unique pour le milieu poreux, le transport se traduisant par:

- un phénomène de convection, analogue à celui des éléments en solution,
- un phénomène analogue à la dispersion en milieu poreux:
 - la conduction pure dans les deux phases solide + liquide remplace la diffusion moléculaire,
 - l'hétérogénéité de la vitesse réelle engendre une "conductivité fictive" anisotrope équivalente à la dispersion cinématique, que l'expérience montre être également une fonction linéaire du module de la vitesse (Ledoux, 1977; Sauty, 1978).

La conservation de la chaleur permet directement d'écrire:

$$\operatorname{div} (\bar{\lambda} \operatorname{grad} \theta - \rho C \vec{U} \theta) = \omega \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} + (1 - \omega) \rho' C' \frac{\partial \theta'}{\partial t} = \rho'' C'' \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

avec: $\bar{\lambda}$: tenseur de conductivité équivalente,

θ : température,

ρC : masse volumique et chaleur spécifique de l'eau,

$\rho' C'$: masse volumique et chaleur spécifique du solide dont la température $\theta' = \theta$,

$\rho'' C''$: masse volumique et chaleur spécifique du milieu poreux (eau+solide):

$$\rho'' C'' = \omega \rho C + (1 - \omega) \rho' C'$$

ω : porosité totale.

Le tenseur de conductivité équivalente $\bar{\lambda}$ regroupe la conductivité isotrope du milieu poreux (eau+solide) en l'absence d'écoulement, λ_o , et un terme de macrodispersivité lié à l'hétérogénéité de la vitesse, fonction linéaire de cette vitesse. Nous proposons d'utiliser la vitesse de Darcy U , multipliée par la capacité calorifique volumique de l'eau, ρC , pour que le coefficient de proportionnalité ait la dimension d'une longueur, comme pour la macrodispersivité en dispersion. Dans les axes longitudinaux et transversaux liés à la vitesse, on aura:

$$\lambda_L = \lambda_o + \beta_L \rho C |\vec{U}|$$

$$\lambda_T = \lambda_o + \beta_T \rho C |\vec{U}|$$

On peut tenter de ramener cette équation ainsi que celle de la dispersion à des formes comparables, pour rechercher les similitudes des coefficients de dispersivité. On utilisera pour cela des températures ou des concentrations réduites de la forme:

$$\frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}}$$

On peut se référer pour cela soit à la vitesse de Darcy, soit à la vitesse d'avancée du front (thermique ou chimique), avec d'ailleurs les mêmes résultats pour la comparaison des dispersivités:

- par rapport à la vitesse de Darcy:

$$\begin{aligned} \text{traceur:} \quad \operatorname{div}(\overline{D} \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(\overline{U} C) &= \omega \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \overline{D} = \omega d + \overline{\alpha} |\overline{U}| \\ \text{chaleur:} \quad \operatorname{div}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\rho C} \operatorname{grad} \theta\right) - \operatorname{div}(\overline{U} \theta) &= \frac{\rho'' C''}{\rho C} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{\lambda}}{\rho C} = \frac{\lambda_o}{\rho C} + \overline{\beta} |\overline{U}| \end{aligned}$$

- par rapport à la vitesse d'avancée du front convectif:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overline{D'} \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(\overline{u}^* C) &= \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \overline{D'} = d + \overline{\alpha} |\overline{u}^*| \\ \operatorname{div}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\rho'' C''} \operatorname{grad} C\right) - \operatorname{div}(\overline{u}^{*'} C) &= \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{\lambda}}{\rho'' C''} = \frac{\lambda_o}{\rho'' C''} + \overline{\beta} |\overline{u}^{*'}| \end{aligned}$$

dans laquelle la vitesse du front moyen de traceur et de chaleur est:

$$\overline{u}^* = \frac{\overline{U}}{\omega} \quad \text{et} \quad \overline{u}^{*'} = \frac{\rho C \overline{U}}{\rho'' C''}$$

On voit qu'il faudra comparer dans les deux cas la dispersivité du traceur, α , à la dispersivité β de la chaleur, qui s'expriment toutes deux en unités de longueur. Nous allons tenter de le faire sur un même site expérimental.

Sous l'égide du CNRS, puis de la DGRST, des expériences de traçage chimique, puis thermique, ont été conduites sur une même parcelle, à Bonnaud dans le Jura, par une équipe réunissant le BRGM, le CENG, puis le BURGEAP et l'Ecole des Mines. La nappe est constituée de sables et de graviers relativement homogènes, de 3 m d'épaisseur. Elle est captive, de transmissivité de l'ordre de 10^{-3} m²/s, et de coefficient d'emménagement compris entre 10^{-3} et 10^{-4} .

Les valeurs des principales dispersivités obtenues (Peaudecerf et al., 1975; Ledoux et al., 1977; Sauty, 1978, 1979), calculées par calage de modèles, sont rassemblées dans le tableau de la page suivante. Ces résultats semblent montrer que les dispersivités pour la chaleur ou pour le traceur sont comparables, même si la conductivité en l'absence d'écoulement est environ 400 à 1.000 fois plus forte que la diffusion moléculaire.

Ceci semble contraire aux premiers travaux réalisés en laboratoire sur une telle comparaison: Green (1963, cité par Bear en 1972) indique que l'équivalence entre les dispersivités thermique et chimique est vraie pour des nombres de Péclet de l'ordre de 10.000, et qu'en dessous de 3.000, la dispersivité thermique est négligeable.

Or, les nombres de Péclet, tant chimiques que thermiques, dans les expériences de Bonnaud, sont au plus de l'ordre de quelques dizaines:

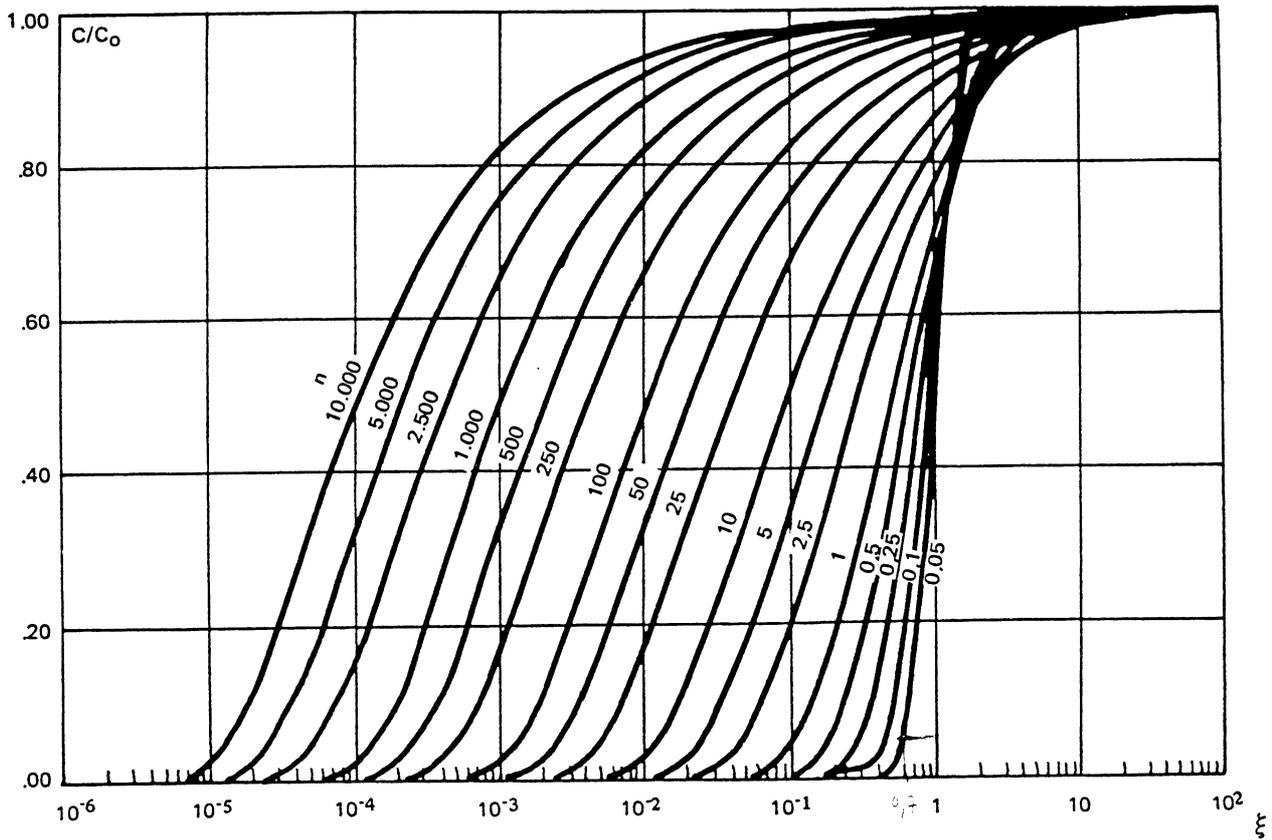
$$\text{Pe traceur} = \frac{u\ell}{d}$$

$$\begin{aligned} \text{avec: } u \text{ (vitesse moyenne de pore)} &\cong 0,09 \text{ m/h} \\ \ell \text{ (diamètre moyen des grains)} &\cong 2 \text{ mm,} \\ d \text{ (coefficient de diffusion moléculaire)} &\cong 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s en milieu poreux,} \\ \text{Pe} &\cong 50, \end{aligned}$$

$$\text{Pe thermique} = \frac{u'\ell}{\lambda_o/\rho'' C''} = \frac{U\ell}{\lambda_o/\rho C}$$

$$\begin{aligned} \text{avec: } U \text{ (vitesse de Darcy, au rayon moyen de 6 m)} &\cong 0,03 \text{ m/h,} \\ \ell \text{ (diamètre moyen des grains)} &\cong 2 \text{ mm,} \\ \lambda_o/\rho C &\cong 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s,} \\ \text{Pe} &\cong 0,1. \end{aligned}$$

Il semble donc, comme le remarque Sauty (1978) que sur le terrain, à l'échelle considérée, la macrodispersivité due à l'hétérogénéité de la vitesse dans les différentes strates de la formation, domine nettement sur



Pl. 10 - Solution monodimensionnelle de l'équation de la dispersion 9.2.3.2.

la diffusion moléculaire ou même la conduction, et rend donc comparables les dispersivités obtenues pour l'un et l'autre traceur.

Mais à une échelle plus grande, sur un traçage thermique de plus grande longueur et durée, les coefficients de dispersion et de conduction vont éventuellement atteindre une valeur asymptotique, et la dispersivité du traceur devrait être environ 5 fois plus forte que la dispersivité thermique. On manque cependant d'expérience pour le confirmer.

Voici quelques valeurs de λ_0 et $\rho'C'$ pour différentes roches:

	$\lambda^0, 10^{-3} \text{ Kcal/sec.m } ^\circ\text{C}$	$\rho'C'$ du minéral, Kcal/m ³ °C
Sable sec	0,1 à 0,2	450
Sable humide	0,6 à 0,8	450
Argile sèche	0,2 à 0,5	500
Argile humide	0,3 à 0,4	500
Granite	0,6 à 0,9	550
Grès	0,35 à 1,02	550
Eau	0,1429	1000
Sel	1,4	475

Notez que pour calculer la capacité calorifique volumique de la roche, il faut tenir compte de l'eau contenue:

$$\rho''C'' = \omega\rho C + (1 - \omega)\rho'C'$$

avec des porosités de 10 à 20%, $\rho''C''$ est de l'ordre de 500 à 600 Kcal/m³°C.

Il faut aussi se souvenir qu'on doit coupler, à cette équation de transfert de chaleur, la loi de Darcy généralisée et l'équation de continuité en milieu poreux, qui donneront la vitesse \vec{U} . Ce couplage se fait par la masse volumique $\rho = \rho(\theta)$ et la viscosité $\mu = \mu(\theta)$.

Ce couplage par la masse volumique a une conséquence importante: de l'eau chaude injectée dans un aquifère aura tendance à circuler vers le toit, par effet de densité. Ceci constitue un des problèmes du stockage d'eau chaude dans les nappes. Par ailleurs, même en régime non perturbé par l'intervention humaine, le flux de chaleur géothermique, venant du bas, peut créer un écoulement vertical ascendant dans une couche aquifère. Par continuité cependant, un écoulement descendant doit prendre naissance, si bien que l'on assiste à la formation de "cellules de convection naturelle" dans l'aquifère.

Bories et Combarous (1975)* ont étudié ce phénomène de convection naturelle. Ils ont mis en évidence qu'en dessous d'un gradient thermique vertical, minimum, la convection n'apparaît pas. Quand elle apparaît,

* Ils définissent un "nombre de Rayleigh en milieu poreux" par:

$$R_a^* = g \frac{\alpha\rho(\rho C)k}{\mu\lambda} e\Delta\Theta$$

avec α = coefficient d'expansion thermique volumique du fluide (10^{-3} à 10^{-4} °C)⁻¹; ρ = masse volumique du fluide; (ρC) = capacité calorifique volumique du fluide, k = perméabilité intrinsèque, μ = viscosité dynamique du fluide, λ = conductivité équivalente du milieu poreux (immobile); e = épaisseur de la couche; $\Delta\Theta$ = différence de température entre toit et mur de la couche, supposé imperméable et à température constante.

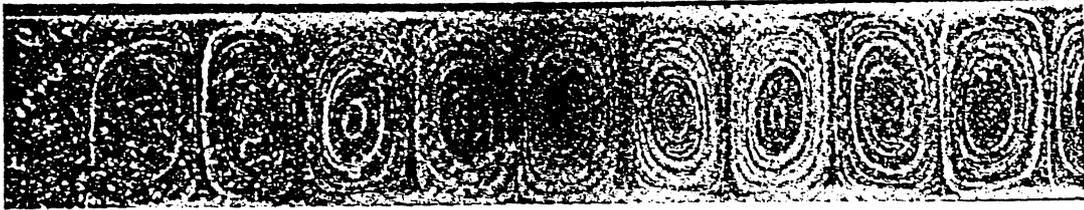
La convection naturelle apparaît si:

$$R_a^* \cos \gamma > 4\Pi^2$$

γ étant l'inclinaison sur l'horizontale de la couche.

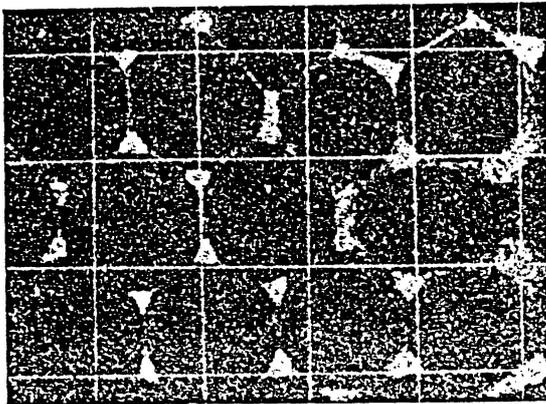
des cellules grossièrement hexagonales (dans le plan) se mettent en place, dont la taille et la vitesse de circulation peuvent être prévues (voir Pl. 11).

Ces phénomènes de circulation naturelle sous gradients thermiques peuvent être à l'origine de gisements miniers (gisements hydrothermaux).

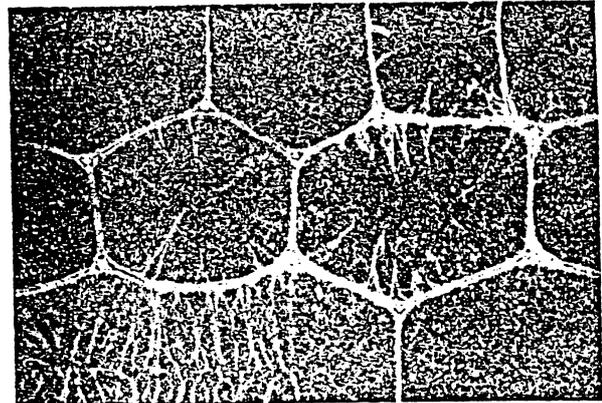


Visualisation des lignes de courant, en coupe verticale.
La face supérieure est froide, la plaque inférieure est chaude.

H = 4 cm

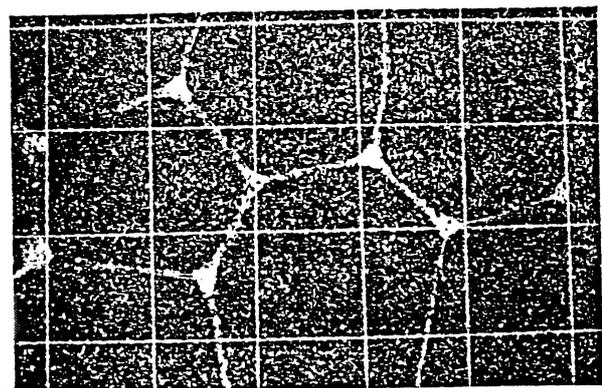


H = 5,5 cm



Visualisation de la forme hexagonale
des cellules, vue de dessus.
H est l'épaisseur de la couche poreuse.

H = 6 cm



Pl. 11 - Cellules convectives en milieu poreux.
(d'après Borjes, 1970)

			DISPERSION				CONDUCTION		
Auteurs	Traceur	Type d'écoulement	Distance de traçage (m)	Dispersivité longitudinale	Porosité cinématique	Diffusion moléculaire en milieu poreux	Dispersivité longitudinale	Capacité calorifique relative du milieu poreux	Diffusivité thermique pure
				α_L, m	%	$d, m^2/s$	β_L, m	$\frac{\rho''C''}{\rho C}, \%$	$\frac{\lambda_0}{\rho''C''}, m^2/s$
PEAUDECERF et al. 1975	Iode 131	parallèle, traçage ponctuel	13,05	0,70	33				
	"	idem, autres forages	12,97	1,20	29				
	"	idem	26,02	2,23	37				
	"	idem	35,52	2,19	48	$\sim 1.0 \cdot 10^{-9}$			
SAUTY 1979	INa	Radial convergent	13,00	1,6	9				
	"	traçage par piézo doublet de forage (inject. + pomp.)	13,00	4,0	9				
LEDOUX 1978	Chaleur	Radial puits uniq. (inject. + pomp.)	13,00				3,00	50	4.10^{-7}
SAUTY 1978	Chaleur	Radial divergent puits multiples d'observation	4 à 13,00				1,00	62,5	$9,6.10^{-7}$
SAUTY 1978	Chaleur	Même expérience interprétée avec conduction équival. constante $\lambda_L = \lambda_0$					0	62,5	192.10^{-7}

N.B. 1) Les expériences de 1978 ont été faites après avoir décolmaté violemment les forages à l'air lift, entraînant peut-être une petite modification du terrain.

2) Les porosités cinématiques estimées en 1975 sont probablement surestimées du fait d'une mauvaise connaissance de la perméabilité, donc de la vitesse de Darcy, le gradient seul étant connu, alors qu'en écoulement radial, la vitesse de Darcy est imposée.

SOLUTIONS NUMERIQUES DES EQUATIONS D'ECOULEMENT ET DE TRANSPORT

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> 10.1. <i>Choix d'une technique numérique et d'un code</i> 10.2. <i>Différences finies</i> <ul style="list-style-type: none"> 10.2.1. <i>Approximations des dérivées par différences</i> 10.2.2. <i>Equation de bilan des masses</i> 10.2.3. <i>Différences finies intégrées</i> 10.2.4. <i>Différences finies intégrées: cas particuliers</i> 10.2.5. <i>Estimation des transmissivités</i> 10.2.6. <i>Différences finies en régime transitoire</i> 10.2.7. <i>Problème non linéaire</i> 10.2.8. <i>Systèmes multicouches</i> 10.2.9. <i>Systèmes tri-dimensionnels</i> 10.2.10. <i>Comment représenter les rivières</i> 10.2.11. <i>Estimation de l'alimentation régionale</i> 10.2.12. <i>Représentation des puits</i> 10.3. <i>Eléments finis</i> | <ul style="list-style-type: none"> 10.3.1. <i>Eléments finis linéaires sur des triangles</i> 10.3.2. <i>Eléments finis linéaires isoparamétriques avec l'approximation de Galerkin</i> 10.2.3. <i>Eléments d'ordre supérieur</i> 10.4. <i>Comment résoudre les grands systèmes</i> <ul style="list-style-type: none"> 10.4.1. <i>Méthodes directes</i> 10.4.2. <i>Méthodes itératives</i> 10.5. <i>Comment résoudre l'équation de transport</i> <ul style="list-style-type: none"> 10.5.1. <i>Différences finies</i> 10.5.2. <i>Méthode des caractéristiques</i> 10.5.3. <i>Eléments finis</i> 10.5.4. <i>Détermination de la vitesse</i> 10.6. <i>Utilisation d'un modèle</i> <ul style="list-style-type: none"> 10.6.1. <i>Collecte des données</i> 10.6.2. <i>Choix des paramètres</i> 10.6.3. <i>Calage</i> 10.6.4. <i>Prédiction à l'aide d'un modèle</i> |
|---|---|

10.1. CHOIX D'UNE TECHNIQUE NUMERIQUE ET D'UN CODE

On peut se voir obligé d'utiliser une solution numérique des équations de l'écoulement et/ou du transfert plutôt que des solutions analytiques pour une ou plusieurs des raisons suivantes:

- 1) Le domaine de l'écoulement est délimité par des limites complexes jouant un rôle pendant le temps qui intervient dans la solution recherchée. Les solutions analytiques disponibles s'appliquent à des milieux infinis ou semi-infinis; la méthode des images ne peut être utilisée, ou bien il devient trop compliqué de représenter le rôle des limites par cette méthode.
- 2) Le problème est non linéaire (par exemple, la transmissivité varie avec la charge dans une nappe libre), et il n'existe pas de solution analytique.
- 3) Les propriétés du milieu varient dans l'espace, tandis que les solutions analytiques supposent que le milieu est homogène ou que la géométrie des hétérogénéités est très simple.
- 4) La géométrie et la grandeur du terme source sont trop complexes pour qu'elles puissent être représentées par une source ponctuelle ou une ligne de source, ou une intégrale des deux, suivant un tracé simple.

5) On peut trouver une solution analytique, mais son expression est si complexe (par exemple, la somme d'une série infinie, l'intégrale de fonctions complexes) que les calculs numériques de sa valeur demandent beaucoup plus d'effort (de programmation et de temps CPU) que l'utilisation directe d'une solution numérique du problème originel.

Dans certains de ces cas, il peut s'avérer préférable d'employer une méthode semi-analytique, par laquelle le problème est d'abord résolu analytiquement dans le domaine des transformées de Laplace, et la transformée inverse de Laplace est ensuite calculée numériquement. Cette approche peut être intéressante pour une équation de transfert comprenant des réactions cinétiques du premier ordre par exemple, à laquelle la transformation de Laplace convient très bien (voir Talbot, 1979). Une autre méthode semi-analytique utilise les fonctions de Green (voir, par exemple, Roach, 1982 et Herrera, 1985).

Dans les cas où des solutions numériques sont demandées, il faut d'abord décider: 1) quelle méthode numérique choisir (essentiellement, différences finies, éléments finis, éléments limites), et 2) comment obtenir un code (le programmer ou obtenir l'accès à un code qui existe déjà).

Il n'y a pas de réponse unanimement acceptée à la première question; au sujet des trois méthodes décrites ci-dessus, on peut faire les remarques suivantes:

1) Différences finies: Cette méthode est facile à comprendre et à programmer. Elle convient très bien à la résolution de problèmes régionaux d'écoulement des nappes, en une ou deux dimensions, dans des systèmes multicouches ou en trois dimensions. Bien qu'elle soit, en principe, capable de traiter des mailles de n'importe quelle forme et taille, elle est, en pratique, limitée à des mailles simples: des carrés réguliers, des carrés gigognes, des rectangles ou des parallélépipèdes rectangulaires en trois dimensions. Elle peut très bien représenter les hétérogénéités des propriétés du milieu, pourvu que la forme de ces hétérogénéités puisse être décrite de façon adéquate par la forme des mailles; dans la pratique, l'anisotropie doit être limitée aux directions parallèles aux côtés des mailles. Elle convient moins bien à la résolution de l'équation de transfert sauf dans les cas où les méthodes des caractéristiques et du calcul des trajectoires des particules sont utilisées (voir § 10.5.2.).

2) Éléments finis: Cette méthode est moins facile à expliquer et beaucoup moins facile à programmer que la précédente. Comme cette approche est plus flexible que celle des différences finies, un programme d'éléments finis peut être plus compliqué à utiliser (davantage de données d'entrée, par exemple, sur la géométrie des mailles, donc plus de possibilités d'erreurs) et peut demander davantage de temps ordinateur. Cependant, la forme des mailles est beaucoup moins limitée: en pratique, on prend des triangles et des quadrilatères en deux dimensions et, en trois dimensions, des tétraèdres ou des parallélépipèdes de n'importe quel angle. Ceci permet de décrire d'une manière beaucoup plus satisfaisante la forme des limites du milieu ainsi que celle des hétérogénéités ou les fonctions source, ce qui rend également la méthode des éléments finis idéale pour résoudre les problèmes à limites mobiles, par exemple, ceux ayant une surface libre et une interface abrupte entre eau douce et eau salée ou entre deux fluides immiscibles. Elle est capable de traiter toutes les directions d'anisotropie, et ces directions peuvent même changer d'un élément à un autre ou avec le temps. En pratique, dans les problèmes d'écoulement, la méthode des éléments finis peut être employée pour des études régionales, mais elle est particulièrement efficace dans les problèmes locaux de génie civil tels que l'exhaure de l'eau d'une excavation, le drainage d'une mine et l'écoulement autour d'un barrage, où les formes des limites et des hétérogénéités doivent être représentées avec précision. Remarquez que quand il faut calculer les poussées d'écoulement en tant qu'entrée d'un modèle mécanique, il est souvent nécessaire de le faire sur le même réseau que celui utilisé pour les calculs de structure, et presque tous ceux-ci utilisent des éléments finis. Pour résoudre l'équation de transfert, la méthode des éléments finis est bien supérieure à celle des différences finies, puisqu'elle peut traiter l'anisotropie du tenseur de dispersion, et que la taille des mailles peut être adaptée à la grandeur de la vitesse; on peut ainsi rechercher un compromis entre la stabilité et la dispersion numérique.

3) Des approches d'éléments aux limites ou d'intégrales de limites ont été proposées récemment pour résoudre l'équation d'écoulement. L'avantage principal de celles-ci est que la précision du calcul ne dépend pas de la taille des éléments utilisés, contrairement à ce qui est le cas pour les méthodes des différences finies et des éléments finis. Ainsi, on peut se servir de quelques éléments très grands (ou même infinis), ce qui rend la méthode très efficace du point de vue du temps de calcul. Dans un premier temps, la solution numérique se calcule uniquement le long des limites des éléments; si l'on demande en plus explicitement la solution à

l'intérieur d'un élément, sa valeur est calculée dans un second temps par une intégration numérique dans cet élément. La restriction principale est que les propriétés du milieu, dans un élément donné, sont supposées constantes: si les hétérogénéités du milieu sont telles qu'il faut inclure un grand nombre d'éléments afin de les décrire convenablement, alors la méthode de l'intégrale des limites perd de sa supériorité, et l'on peut aussi bien se servir de celle des différences finies ou de celle des éléments finis. Par conséquent, cette méthode est beaucoup moins flexible et générale que les précédentes (voir Brebbia, 1978; Liu et Liggett, 1979; Tal et Dagan, 1983; Herrera, 1984).

La deuxième question: comment obtenir un code relève plutôt du jugement personnel et l'on ne peut qu'offrir quelques suggestions ici. La programmation d'un code simple de différences finies pour un problème en une ou deux dimensions avec des mailles simples (carrés ou rectangles) et des limites simples peut se faire en quelques jours. Toutefois, ce code ne sera pas facile à utiliser; si l'on veut le rendre d'utilisation aisée (c'est-à-dire lui donner, par exemple, des données d'entrée simples, une recherche d'erreurs et des messages d'erreur, des sorties graphiques), cela peut demander quelques mois. Un code plus complexe en différences finies, multicouches ou à trois dimensions, ayant plusieurs options (par exemple, des non linéarités) peut exiger de six mois à un an de travail, tout comme un code en éléments finis à deux dimensions qui soit facilement maniable. Un code très complexe de transfert en éléments finis à trois dimensions peut demander un effort allant d'un à deux ans, et un modèle de gisement pétrolier à composantes et phases multiples à trois dimensions peut représenter un effort de cinq à dix années (ou plus). Il ne faut pas oublier qu'un nouveau code doit être soigneusement vérifié et validé à l'aide de solutions analytiques (ou numériques) connues avant qu'il puisse être utilisé dans un contexte sérieux. Ces tests risquent d'être très longs.

Il existe, cependant, à l'heure actuelle, un grand nombre de codes qui sont disponibles, soit gratuitement, soit au prix de la reproduction d'un jeu de cartes, d'une bande magnétique ou d'un disque mou, ou même au prix d'une partie des frais de cette reproduction. Pour faciliter l'accès aux codes de ce type, une banque de codes a été établie (Bachmat et al., 1980)*. Des fichiers informatiques des codes disponibles en modélisation d'hydrogéologie ont été établis pour l'écoulement, le transfert, la gestion, le traitement des données, etc... où plus de 500 codes sont décrits. En cherchant dans ces fichiers, on trouvera parmi les codes disponibles ceux qui sont susceptibles de résoudre au mieux un problème donné, ceux qui sont adaptés à une calculatrice à main, à un micro-ordinateur ou à un ordinateur central.

Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement les méthodes de différences finies et d'éléments finis, comment résoudre de grands systèmes linéaires et, enfin, comment utiliser les modèles numériques dans les études régionales d'écoulement d'eau souterraine. Même si l'on choisit de se servir d'un code existant pour résoudre un problème d'écoulement ou de transfert d'eau souterraine, il est indispensable de comprendre parfaitement quels sont les principes et les limitations des modèles numériques afin de les utiliser avec efficacité.

10.2. DIFFERENCES FINIES

Il existe au moins trois méthodes qui peuvent être utilisées pour présenter les différences finies. Nous allons décrire les deux premières, à savoir la méthode des différentielles et celle du bilan de masse à l'aide d'un exemple simple, et aborder ensuite plus rigoureusement la troisième, celle des différences finies intégrées. Pour la même équation, les résultats seront identiques.

Considérons d'abord l'équation simple de l'écoulement dans une nappe captive, en deux dimensions (5.3.10) qui s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

où T est la transmissivité qui peut varier dans l'espace [$L^2 T^{-1}$], h est l'inconnue, la charge (longueur), S est le coefficient d'emmagasinement qui peut varier dans l'espace (sans dimension), et q est le terme source/puits qui, à chaque point, représente la somme algébrique de la densité de l'alimentation ou du débit à la sortie

* The International Groundwater Modeling Center, Holcomb Research Institute, Butler University, Indianapolis, In. 46208 ou TNO-DGV, Institute of Applied Sciences, PO Box 285, 2600 Delft, Pays-Bas. L'un ou l'autre de ces deux instituts fournira tous les renseignements nécessaires.

de l'aquifère, qui varie également dans l'espace. Ceci s'exprime en débit d'écoulement par unité de surface [LT^{-1}] et le terme est positif pour un puits et négatif pour une source.

Nous recherchons la solution de cette équation sur un domaine fini limité avec des conditions aux limites imposées (voir § 6.3.). Nous considérerons des limites à charge imposée (c'est-à-dire de Dirichlet) ou des flux imposés (c'est-à-dire de Neuman). N'importe laquelle de ces deux conditions aux limites peut être imposée sur différents segments des limites. Les valeurs correspondantes de la charge ou des flux imposés sont supposées connues, ainsi que les valeurs de T , S et Q dans la totalité du domaine. Pour les premiers exemples simples, nous supposerons que l'équation est résolue en régime permanent (c'est-à-dire, $\partial h/\partial t = 0$) et que T est isotrope. Un maillage carré est superposé au domaine où l'équation doit être intégrée (fig. 10.1); la taille du maillage est déterminée par la précision que l'on souhaite obtenir dans l'approximation numérique de la vraie solution (plus les mailles seront petites, meilleure sera l'approximation). Les coordonnées x et y dans le domaine seront prises le long des côtés du maillage.

Le principe de la méthode des différences finies est la recherche de la valeur numérique, au centre de chacun des carrés, de la charge hydraulique qui est supposée représenter une valeur "moyenne" de la vraie charge de chaque maille. Les mailles sont numérotées de 1 à r ; H_1 à H_r sont les charges aux nœuds (les centres des carrés) et T_1 à T_r , S_1 à S_r et Q_1 à Q_r sont la transmissivité, le coefficient d'emmagasinement et le terme source dans chaque maille, supposés être respectivement la moyenne de T et de S sur l'intégrale de q dans la maille. Si un nœud i tombe sur une limite à charge imposée, H_i sera connue à ce nœud; si le côté d'une maille représente une limite à flux imposé, le flux entrant dans la maille à travers cette limite sera connu. Considérons (fig. 10.2) cinq nœuds voisins à l'intérieur du maillage, que nous appellerons pour plus de facilité C, N, E, S et W (centre, nord, est, sud et ouest) respectivement, bien qu'ils aient, en réalité, des numéros entre 1 et r selon le système de numérotation choisi, généralement de l'ouest à l'est et du nord au sud.

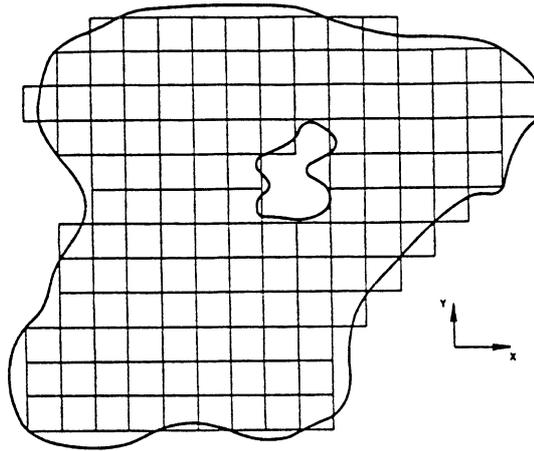


Figure 10.1. Maillage carré de différences finies sur un domaine limité.

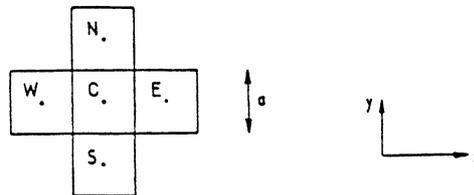


Figure 10.2. Cinq nœuds voisins sur un maillage de différences finies.

Nous utiliserons trois méthodes différentes pour établir l'approximation de différences finies de l'équation différentielle partielle continue pour l'écoulement en régime permanent, qui est:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) = q \quad (10.2.1)$$

Nous ne traiterons pas le problème de la consistance de l'approximation des différences finies, ce qui revient à montrer que, quand la taille des mailles tend vers zéro, la solution approximée H tend vers la vraie solution h . On peut démontrer que, pour les différences finies et les éléments finis, ceci est en effet le cas.

La méthode a été bien décrite par Varga (1962), Remson et al. (1971), Thomas (1973), Prickett (1975), Narasimhan et Witherspoon (1976), Trescott et al. (1976), Mercer et Faust (1981) et Wang et Anderson (1982).

10.2.1. Approximation des dérivées par différences

Le nom "différences finies" vient de ce que les dérivées sont approximées par différences. Si a est la taille d'un carré, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \text{approximation de } \frac{\partial h}{\partial x} \text{ entre les nœuds W et C} &= \frac{H_c - H_w}{a} \\ \text{approximation de } \frac{\partial h}{\partial x} \text{ entre les nœuds C et E} &= \frac{H_e - H_c}{a} \\ \text{approximation de } \frac{\partial h}{\partial y} \text{ entre les nœuds S et C} &= \frac{H_c - H_s}{a} \\ \text{approximation de } \frac{\partial h}{\partial y} \text{ entre les nœuds C et N} &= \frac{H_n - H_c}{a} \end{aligned}$$

Maintenant nous devons approximer les dérivées du second ordre, ou plus précisément, les dérivées telles que $(\partial/\partial x)(T\partial h/\partial x)$. Soit T_{nc}, T_{ec}, \dots les valeurs des transmissivités évaluées entre N et C, E et C, etc... (voir § 10.2.5. pour l'évaluation de celles-ci à partir de la transmissivité T_n, T_c, \dots dans chaque maille). Pour le nœud C, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \text{approximation de } \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) \text{ dans C} \\ &= \left[\left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) \text{ entre C et E} - \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) \text{ entre W et C} \right] / a \\ &= \left[T_{ec} \frac{H_e - H_c}{a} - T_{wc} \frac{H_c - H_w}{a} \right] / a \\ &= T_{ec}(H_e - H_c)/a^2 + T_{wc}(H_w - H_c)/a^2 \end{aligned}$$

De même, nous obtenons:

$$\text{approximations de } \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) \text{ dans C} = T_{nc} \frac{H_n - H_c}{a^2} + T_{sc} \frac{H_s - H_c}{a^2}$$

En additionnant ces deux termes, multipliés par a^2 , et étant donné (10.2.1), nous trouvons:

$$T_{nc}(H_n - H_c) + T_{ec}(H_e - H_c) + T_{sc}(H_s - H_c) + T_{wc}(H_w - H_c) = a^2 \bar{q} = Q_c \quad (10.2.2)$$

où \bar{q} serait la moyenne du terme source q sur la maille. Cependant, $a^2 \bar{q}$ est alors égal à Q_c , l'intégrale de q sur la maille.

Ceci est l'équation des différences finies pour le nœud C de l'équation différentielle partielle originelle. Remarquez que cette équation est linéaire en H_i ; s'il y a p nœuds dans le maillage, où la charge n'est pas imposée (c'est-à-dire que dans $r-p$ nœuds situés sur les limites, la charge est imposée), alors notre problème a p inconnues et nous pouvons écrire p équations linéaires semblables à (10.2.2) pour ces p nœuds. La solution dans chaque nœud est ainsi obtenue en résolvant un système linéaire de p équations avec p inconnues, ce qui est mathématiquement insignifiant (§ 10.4.). Notez que le numéro d'ordre des p inconnues ne se trouvera

pas, en général, être de 1 à p : selon le système de numérotation utilisé et la position des limites à charge imposée, ces numéros se situeront entre 1 et r , le nombre total de carrés.

Les équations de différences finies pour les nœuds voisins d'une limite à flux imposé sont légèrement différentes, mais nous les verrons plus tard.

10.2.2. L'équation de bilan de masse

Au lieu de commencer par l'équation différentielle partielle (10.2.1), nous pouvons établir l'équation de différences finies en n'utilisant directement que la loi de Darcy et le principe de la conservation de la masse. Prenez la maille C dans la figure 10.2. Dans un régime permanent, le principe de la conservation de la masse impose que la somme algébrique des flux massiques traversant chacun des quatre côtés de la maille C soit égale à la masse qui entre dans C par alimentation ou en sort par débit aux exutoires, c'est-à-dire à l'intégrale du terme source/puits ρq sur la maille C, où ρ est la masse volumique du fluide. Avec la loi de Darcy, nous pouvons estimer ces flux directement. Nous garderons la même notation que celle de (10.2.1) et supposons que ces flux sont positifs quand ils quittent C, tandis que q est positif quand c'est un puits (débit de sortie) de sorte que l'équation de bilan de masse devient:

$$\text{somme des flux de masse} + \text{intégrale de } \rho q = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et flux de masse quittant C par un côté} &= (\text{superficie du côté}) \times (\text{vitesse}) \times (\text{masse volumique du fluide}) \\ &= ae \left(-K \frac{\partial h}{\partial n} \right) \rho \end{aligned}$$

où e est l'épaisseur de l'aquifère, K est la conductivité hydraulique, n est la normale sur le côté dirigée vers l'extérieur, a est la taille d'une maille et $T = Ke$. Le flux massique quittant C par un côté est alors donné par $a\rho T \partial h / \partial n$.

Pour chaque côté, nous avons donc:

$$\text{flux quittant le côté entre W et C} = -a\rho T_{wc} \frac{H_w - H_c}{a}$$

$$\text{flux quittant le côté entre N et C} = -a\rho T_{nc} \frac{H_n - H_c}{a}$$

$$\text{flux quittant le côté entre E et C} = -a\rho T_{ec} \frac{H_e - H_c}{a}$$

$$\text{flux quittant le côté entre S et C} = -a\rho T_{sc} \frac{H_s - H_c}{a}$$

et l'intégrale de ρq sur la maille C est ρQ_c si ρ est constant.

Ensuite, si nous écrivons l'équation de bilan de masse, en simplifiant par ρ , supposé constant, nous obtenons à la fin exactement la même équation que (10.2.2). Ceci nous aidera à établir la forme de l'équation des différences finies pour les nœuds voisins d'une limite à flux imposé. En effet, chacun des termes tels que $+T_{nc}(H_n - H_c)$ représente un flux volumique entrant par le côté du carré C entre N et C. Par conséquent, si un côté d'une maille est une limite à flux imposé, il suffit de substituer la valeur imposée de ce flux, calculée le long du côté donné, à l'expression des différences que l'on obtiendrait normalement. Par exemple (Fig. 10.3), si le côté au nord de C est une limite à flux imposé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nœud au nord de C, alors l'équation des différences finies devient:

$$T_{ec}(H_e - H_c) + T_{sc}(H_s - H_c) + T_{wc}(H_w - H_c) - F_n = Q_c$$

ou

$$T_{ec}(H_e - H_c) + T_{sc}(H_s - H_c) + T_{wc}(H_w - H_c) = Q_c + F_n$$

où F_n est le débit d'écoulement imposé [$L^3 T^{-1}$] qui traverse le côté au nord de C, autrement dit, l'intégrale du flux imposé sur le côté, et F est compté comme positif quand il quitte le domaine. Une telle équation reste linéaire dans H_i , mais contient une inconnue de moins que l'équation habituelle. De même, si dans une équation à différences finies, une des charges, par exemple H_e , est une valeur imposée (représentant une condition aux limites de charge imposée), alors le terme $T_{ec}H_e$ est connu et sera transféré au second membre de l'équation, ce qui ne laissera que les inconnues dans le premier membre. En général, ceci est

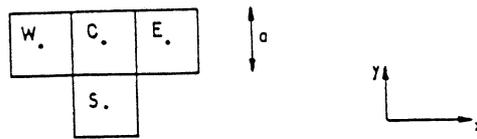


Figure 10.3. Limite à flux imposé

sans importance pour la résolution de l'ensemble du système linéaire de p équations avec p inconnues. On peut, en effet, démontrer que la matrice de ce système linéaire est toujours régulière (c'est-à-dire qu'elle peut être inversée et qu'elle a une solution unique), à condition qu'en régime permanent au moins une maille du domaine ait une condition aux limites de charge imposée.

10.2.3. Différences finies intégrées

Cette méthode est une manière plus rigoureuse d'établir des équations de différences finies. En généralisant, nous supposons maintenant que la transmissivité du milieu est anisotrope avec x et y comme directions principales d'anisotropie, et que le maillage est constitué de polygones d'une forme quelconque et ayant un nombre quelconque de côtés. Soit D_i un de ces polygones, I son centre (ou nœud) et J et K les nœuds de deux polygones voisins (Fig. 10.4). La définition exacte du "centre" d'un polygone (autrement dit, son centre de gravité) est sans importance pour le moment; nous donnerons des exemples plus loin.

Dans la totalité du domaine et, par conséquent, également dans D_i , l'équation différentielle partielle de l'écoulement:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = q$$

doit être vérifiée à chaque point (x, y) . Selon le principe des différences finies intégrées, seule l'intégrale de cette équation sur chacun des polygones D_i doit être vérifiée. Nous écrivons donc:

$$\int_{D_i} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] dx dy = \int_{D_i} \int q dx dy \quad i = 1, \dots, p$$

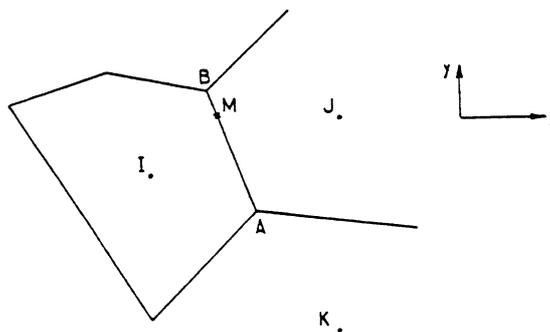


Figure 10.4. Un polygone pour l'approximation de différences finies intégrées.

où p est le nombre de polygones dans lesquels la charge est inconnue (c'est-à-dire non imposée). Autrement dit, l'équation différentielle partielle ne doit plus être vérifiée à tous les points, mais seulement en moyenne sur chaque polygone du maillage. En utilisant des mathématiques très simples, telles que l'expansion en séries de Taylor, nous établirons maintenant rigoureusement la forme générale d'une équation de différences finies. Avec la formule d'Ostrogradsky, l'intégrale spatiale sur D_i est d'abord transformée en une intégrale de contour sur le périmètre Γ_i de D_i ; si \mathbf{A} est un vecteur quelconque, nous pouvons écrire:

$$\int_{D_i} \int \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) ds$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à Γ_i et (\mathbf{A}, \mathbf{n}) le produit scalaire. Ici, nous avons:

$$\int_{\Gamma_i} \left[T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right] ds = \int_{D_i} \int q dx dy \quad (10.2.3.)$$

où n_x et n_y sont les cosinus directeurs de \mathbf{n} , et ds est un élément de Γ_i .

Estimons cette intégrale sur un côté, AB, de D_i (Fig. 10.4). Remarquez qu'elle représente, par définition, le débit échangé entre les polygones D_i et D_j à travers AB. Afin d'estimer les dérivées $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial y$ le long de AB, nous aurons besoin de trois nœuds voisins, en général, I, J et K. Ce n'est que dans des cas très simples que les deux nœuds I et J seront suffisants, comme nous le verrons plus loin. On montrera également comment choisir le nœud K quand cela sera nécessaire. Pour le moment, il suffit de bien comprendre que le même nœud K doit être choisi quand le débit d'écoulement le long de AB est estimé pour l'équation du polygone D_i ou D_j ; sinon, l'équilibre des masses ne sera pas conservé dans la totalité du domaine.

Soient h_i , h_j et h_k les charges réelles aux nœuds I, J et K, et M un point quelconque de AB. Avec l'expansion en séries de Taylor au premier ordre, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} h_i &= h_m + (x_i - x_m) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m + (y_i - y_m) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m \\ h_j &= h_m + (x_j - x_m) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m + (y_j - y_m) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m \\ h_k &= h_m + (x_k - x_m) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m + (y_k - y_m) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m \end{aligned}$$

En supposant h_i , h_j et h_k connues, ceci est un système linéaire avec trois inconnues, h_m , $(\partial h/\partial x)_m$ et $(\partial h/\partial y)_m$ qui peut être résolu sans difficulté.

Si nous supposons de plus que les charges réelles h_i , h_j et h_k peuvent être approximées par les valeurs de différences finies H_i , H_j et H_k qui seront estimées aux nœuds I, J et K, nous avons:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m &= \frac{(H_j - H_i)(y_k - y_i) - (H_k - H_i)(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m &= -\frac{(H_j - H_i)(x_k - x_i) - (H_k - H_i)(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)} \end{aligned} \quad (10.2.4.)$$

Notez que ces expressions ne sont pas des fonctions des coordonnées de M, et qu'elles sont donc constantes le long de AB. Comme les cosinus directeurs sont également constants le long de AB, nous pouvons écrire:

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m n_x \int_{AB} T_x ds + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m n_y \int_{AB} T_y ds$$

Soient T_{xab} et T_{yab} les intégrales des transmissivités directionnelles T_x et T_y le long de AB. Alors, nous avons:

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = C_{ij}(H_j - H_i) + C_{ik}(H_k - H_i)$$

où C_{ij} et C_{ik} sont uniquement des fonctions de la géométrie et des transmissivités:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{T_{xab} n_x (y_k - y_i) - T_{yab} n_y (x_k - x_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)} \\ C_{ik} &= \frac{-T_{xab} n_x (y_j - y_i) + T_{yab} n_y (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)} \end{aligned} \quad (10.2.5.)$$

On pourrait obtenir des expressions analogues pour les autres côtés du polygone D_i . Enfin, si nous définissons le terme intégrale source/puits sur le polygone par:

$$Q_i = \int_{D_i} \int q dx dy$$

alors l'équation de différences finies pour chaque polygone aurait la forme suivante:

$$C_{ij}(H_j - H_i) + C_{ik}(H_k - H_i) + C_{il}(H_l - H_i) + \dots = Q_i \quad (10.2.6.)$$

ce qui est de même nature que (10.2.2.).

Conditions aux limites

Si un nœud du maillage tombe sur une limite à charge imposée, le H_j correspondant est connu. Pour ce nœud, on n'écrit pas d'équation de différences finies, et chaque fois que H_j apparaît dans une autre équation, le terme $C_{ij}H_j$ est transféré au second membre. Si le côté d'un polygone se trouve sur une limite à flux imposé, ce flux imposé est substitué au terme correspondant de l'intégrale de contour et ensuite transféré au second membre de l'équation. Plus précisément, si $\partial h / \partial n$ est imposé le long de AB, alors

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \int_{AB} (T_x n_x^2 + T_y n_y^2) \frac{\partial h}{\partial n} ds$$

ce qui peut être estimé. Remarquez que quand un maillage est dessiné en différences finies sur un domaine, ses nœuds doivent se retrouver sur les limites à charge imposée et ses côtés sur les limites à flux imposé.

10.2.4. Différences finies intégrées: cas particuliers

a) Les rectangles et les carrés

Si les directions principales d'anisotropie de la transmissivité x et y sont parallèles aux côtés du maillage, l'intégrale de contour dans (10.2.3) peut s'écrire (voir Fig. 10.5) comme suit:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds &= \int_{AB} T_x \frac{\partial h}{\partial x} dy + \int_{BB'} T_y \frac{\partial h}{\partial y} dx \\ &+ \int_{B'A'} T_x \frac{\partial h}{\partial x} dy + \int_{A'A} T_y \frac{\partial h}{\partial y} dx \end{aligned}$$

Alors, si les nœuds sont les centres des rectangles (intersection des diagonales), l'expansion en séries de Taylor au premier ordre peut s'écrire en utilisant seulement deux nœuds voisins et donne, par exemple pour $M \in AB$:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m = \frac{H_e - H_c}{x_e - x_c}$$

Si l'on note:

$$T_{rec} = \frac{1}{|AB|} \int_{AB} T_x ds$$

la transmissivité directionnelle moyenne le long de AB, où $|AB|$ est la longueur du segment AB, alors:

$$\int_{AB} T_x \frac{\partial h}{\partial x} dy = T_{rec} \frac{y_b - y_a}{x_e - x_c} (H_e - H_c)$$

et, de même, nous trouvons finalement:

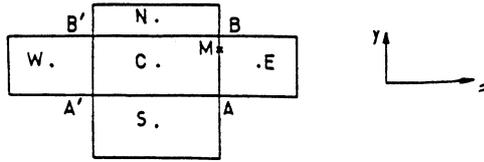


Figure 10.5. Maillage rectangulaire.

Si tous ces rectangles sont de la même taille (a le long de x , b le long de y), (10.2.7) est réduite à:

$$T_{ync} \frac{a}{b}(H_n - H_c) + T_{xec} \frac{b}{a}(H_e - H_c) + T_{ysc} \frac{a}{b}(H_s - H_c) + T_{xwc} \frac{b}{a}(H_w - H_c) = Q_c$$

Si le milieu est isotrope ($T_x = T_y = T$), et le maillage constitué de carrés ($b = a$), cette expression se réduit à (10.2.2) que nous avons établie auparavant par deux méthodes plus simples. Dans le cas des rectangles, il est important de noter le rapport des coefficients de deux inconnues dans des directions différentes, par exemple H_n et H_c dans le système linéaire, soit:

$$\frac{T_{ync}}{T_{xec}} \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Si le rapport d'anisotropie est voisin de 1 et si a/b est voisin de 10, le rapport de deux coefficients de la matrice du système linéaire sera voisin de 100. En fonction de la méthode utilisée pour inverser la matrice, de la taille de celle-ci et de l'exactitude de l'ordinateur (mots de 16, 32 ou 60 bits), un rapport aussi important peut souvent créer des difficultés numériques causées par des erreurs d'arrondi. La solution calculée peut alors être inexacte. Avec des mots à 32 bits, un rapport a/b de 5 est souvent maximum.

b) Carrés gigognes

Il est souvent nécessaire d'obtenir plus de précision dans une partie du domaine que dans d'autres, ce qui veut dire qu'il faut pouvoir varier la taille des mailles dans le maillage. Une façon d'y arriver est d'utiliser des rectangles de tailles variables (Fig. 10.6a), mais ce procédé augmente inutilement le nombre total des mailles, et il est limité par le rapport a/b cité ci-dessus. Une autre façon est de se servir de mailles carrées gigognes (Fig. 10.6b). A condition que deux carrés voisins aient, au plus, une différence de taille d'un facteur 2, il n'y a pas de restriction à la taille relative des plus petits et des plus grands carrés. Quand deux carrés voisins sont de la même taille, on utilise l'expression générale, par exemple, $T_{ync}(H_n - H_c)$. Quand des carrés voisins sont de tailles différentes (Fig. 10.7), l'expansion en séries de Taylor sur trois nœuds de l'équation (10.2.4) doit être utilisée pour estimer l'intégrale de contour. Si a est la taille du grand carré dans la figure 10.7, nous obtenons avec (10.2.4):

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_m = \frac{2}{3a} [(H_j - H_i) + (H_k - H_i)]$$

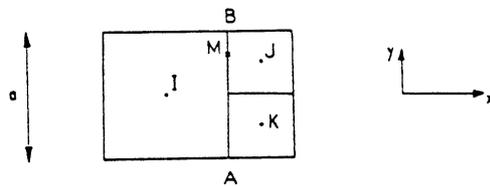


Figure 10.7. Carrés gigognes voisins.

et, comme le long de AB, $n_x = 1$ et $n_y = 0$:

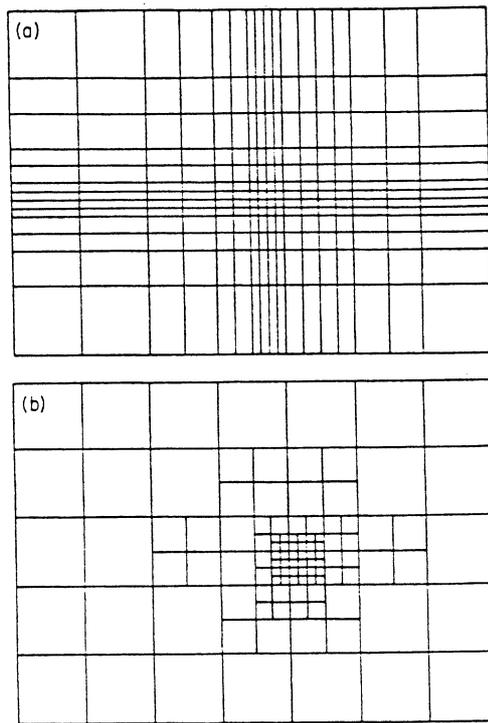


Figure 10.6. Maillage raffiné par (a) rectangles de tailles variables et (b) carrés gigognes.

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \frac{2T_{xijk}}{3} [(H_j - H_i) + (H_k - H_i)]$$

où

$$T_{xijk} = \frac{1}{a} \int_{AB} T_x ds$$

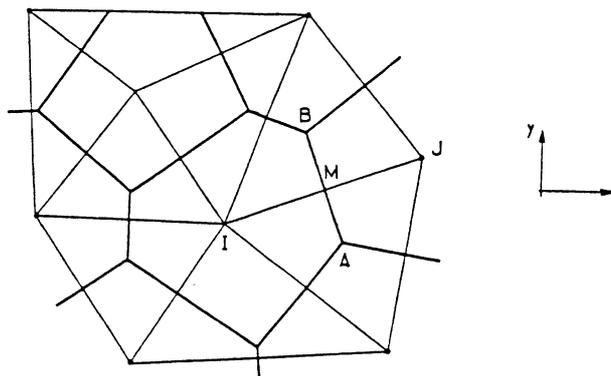


Figure 10.8. Polygones de Thiessen (ou de Voronoï).

est la transmissivité directionnelle moyenne le long de AB. Comme les flux qui traversent AB doivent

être identiques lorsqu'ils sont estimés dans les mailles I, J et K, l'expression ci-dessus se décompose en $(2T_{xijk}/3)(H_j - H_i)$ pour les échanges entre I et J, et en $(2T_{xijk}/3)(H_k - H_i)$ pour les échanges entre I et K.

Remarquez que le rapport entre deux coefficients de la matrice du système linéaire dans un milieu isotrope est au plus $2/3$, et qu'il est indépendant de la taille des carrés: il n'y a, en effet, aucune restriction à la taille des mailles pour les carrés gigognes.

c) Polygones de Thiessen

Un des premiers modèles de différences finies (Tyson et Weber, 1964) utilisait comme maillage des polygones de Voronoï, également connus sous le nom de polygones de Thiessen (cf. Fig. 10.8). Etant donné un ensemble de nœuds qui peuvent être choisis arbitrairement, les polygones de Voronoï sont construits par l'union des médiatrices de chaque segment, reliant successivement tous les nœuds voisins. Pour de tels polygones, et si, et seulement si le milieu est isotrope ($T_x = T_y = T$), l'intégrale de contour peut être estimée par une expansion en séries de Taylor, limitée à deux nœuds voisins:

$$\int_{AB} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \int_{AB} T \frac{\partial h}{\partial n} ds$$

si n est la normale extérieure à AB. Toutefois,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial n} \right)_m = \frac{H_j - H_i}{|IJ|} \quad M \in AB$$

et si nous utilisons

$$T_{ij} = \frac{1}{|AB|} \int_{AB} T ds,$$

la transmissivité moyenne le long de AB, alors:

$$\int_{AB} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = T_{ij} \frac{|AB|}{|IJ|} (H_j - H_i)$$

où $|AB|$ et $|IJ|$ se rapportent à des distances (positives).

On obtient des expressions analogues pour tous les autres côtés des polygones.

10.2.5. Estimation des transmissivités moyennes

Les équations de différences finies exigent que les valeurs des transmissivités moyennes (isotropes ou directionnelles) le long des côtés de chaque maille soient connues. Dans certains modèles, elles sont fournies directement comme données d'entrée, mais plus souvent, les données d'entrée sont les transmissivités moyennes (isotropes ou directionnelles) sur la surface de chaque maille. Celles-ci peuvent être calculées, par exemple par krigeage (§ 11.4.7.) à partir de mesures locales obtenues par des essais de pompage. Nous verrons aussi au § 10.6 que ces transmissivités sont souvent ajustées par le calage du modèle.

Pour le calcul des transmissivités de contour nécessaires, nous limiterons la discussion aux cas particuliers (des rectangles ou des carrés dans les milieux anisotropes, ainsi que des polygones de Thiessen en milieu isotrope), mais elle pourrait être étendue au cas général.

a) Rectangles ou carrés (fig. 10.5)

Nous avons été amenés à estimer des intégrales telles que $\int_{AB} T_x \partial h / \partial x ds$ quand nous avons utilisé l'expansion de Taylor entre C et E afin d'écrire:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m = \frac{H_e - H_c}{x_e - x_c}$$

Cette dérivée était supposée uniforme entre C et E, mais s'il y a une transmissivité constante T_{xc} dans C et T_{xe} dans E, le gradient ne peut plus être uniforme entre ces deux blocs, qui sont en série. Grâce à la conservation de la masse, nous pouvons écrire le long de l'interface AB (voir § 6.3.b):

$$T_{xc} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c = T_{xe} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^e \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m^c = \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m^e$$

où les indices supérieurs c et e indiquent que les dérivées sont estimées dans le milieu, respectivement à gauche ou à droite de AB. En écrivant également une expansion de Taylor séparément dans chaque milieu, nous trouvons:

$$\begin{aligned} h_c &= h_m + (x_c - x_m) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c + (y_c - y_m) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m^c \\ h_e &= h_m + (x_e - x_m) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^e + (y_e - y_m) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_m^e \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (h_e - h_c) &= (x_e - x_k) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^e - (x_c - x_k) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c \times \left[(x_e - x_k) \frac{T_{xc}}{T_{xe}} - (x_c - x_e) \right] \end{aligned}$$

où $x_k = x_m$ est la coordonnée le long de x de AB.

En supposant encore que $h_e = H_e$ et que $h_c = H_c$, nous avons:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c = \frac{T_{xe}}{T_{xc}(x_e - x_k) + T_{xe}(x_k - x_c)} (H_e - H_c)$$

Estimons l'intégrale de contour le long de AB dans le milieu homogène de C (on obtiendrait le même résultat en l'estimant dans E); alors, $T_x = T_{xc}$ et:

$$\begin{aligned} \int_{AB} T_x \frac{\partial h}{\partial x} dy &= T_{xc} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_m^c (y_b - y_a) \\ &= \frac{T_{xc} T_{xe} (y_b - y_a)}{T_{xc}(x_e - x_k) + T_{xe}(x_k - x_c)} (H_e - H_c) \end{aligned}$$

Si nous comparons cette expression avec celle donnée dans (10.2.7), nous voyons que la transmissivité "moyenne" définie plus haut est la moyenne harmonique:

$$T_{xec} = \frac{T_{xc} T_{xe} (x_e - x_c)}{T_{xc}(x_e - x_k) + T_{xe}(x_k - x_c)}$$

La même expression pourrait être établie pour toutes les directions.

Pour des carrés ou des rectangles, tous de la même taille, K est le centre de CE et

$$\begin{aligned} T_{xec} &= \frac{2T_{xc}T_{xe}}{T_{xc} + T_{xe}} \\ T_{ync} &= \frac{2T_{yc}T_{yn}}{T_{yc} + T_{yn}} \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Pour les milieux isotropes, ces expressions sont valables quand on substitue T à T_x ou T_y , par exemple:

$$T_{sc} = \frac{2T_s T_c}{T_s + T_c}$$

b) Carrés gigognes (fig. 10.7)

Un calcul analogue entre les carrés I et J et entre I et K donne:

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dy = \frac{4T_{xi}T_{xj}T_{xk}}{T_{xi}T_{xj} + T_{xi}T_{xk} + 4T_{xj}T_{xk}} (H_j - H_i + H_k - H_i)$$

Une expression approximée un peu plus simple, où les flux entre chacun des carrés sont décomposés, est la suivante:

$$\int_{AB} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dy = \frac{2T_{xi}T_{xj}}{T_{xi} + 2T_{xj}} (H_j - H_i) + \frac{2T_{xi}T_{xk}}{T_{xi} + 2T_{xk}} (H_k - H_i)$$

c) Polygones de Thiessen -fig. 10.8)

De même, avec un milieu isotrope, nous trouvons:

$$\int_{AB} T \left(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \frac{|AB|T_iT_j}{|IM|T_j + |MJ|T_i} (H_j - H_i)$$

où $|AB|$, $|IM|$ et $|MJ|$ sont des distances.

10.2.6. Différences finies en régime transitoire

Jusqu'à présent, nous n'avons employé que l'équation de l'écoulement en régime permanent (10.2.1). Si nous voulons résoudre l'équation de l'écoulement en régime transitoire, nous ajoutons simplement un terme au second membre de l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

où S est le coefficient d'emménagement dans une nappe captive ou la porosité de drainage dans une nappe libre. Si nous utilisons la méthode des différences finies intégrées (§ 10.2.3), nous ajouterons le terme:

$$\int_{D_i} \int S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy$$

au second membre de l'équation des différences finies.

Si H_i est la charge des différences finies au nœud I, nous supposons que $\partial h / \partial t$ sur D_i peut être approximé par $\partial H_i / \partial t$.

Nous définissons alors le coefficient d'emménagement moyen comme suit:

$$S_i = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \int S dx dy$$

où $|D_i|$ est la surface de D_i .

Le nouveau terme, qu'il faut ajouter à l'équation des différences finies, est simplement $|D_i|S_i(\partial H_i / \partial t)$. L'équation générale, (10.2.6) deviendrait alors:

$$C_{ij}(H_j - H_i) + C_{ik}(H_k - H_i) + \dots = Q_i + |D_i|S_i \frac{\partial H_i}{\partial t} \quad (10.2.8)$$

Pour simplifier, nous utiliserons maintenant une notation de matrice et écrirons (10.2.8) de la façon suivante:

$$MH = S \frac{\partial H}{\partial t} + Q \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = S^{-1}MH - S^{-1}Q \quad (10.2.9)$$

Si, dans le maillage, il y a p nœuds, où l'on écrit une équation de différences finies semblable à (10.2.8), M est une matrice de $p \times p$ dont les coefficients sont les C_{ij} ou la somme de ceux-ci sur la diagonale; S est

une matrice diagonale de $p \times p$ et $|D_i|S_i$ sont les coefficients sur la diagonale; Q est un vecteur colonne avec les coefficients Q_i ; H est un vecteur colonne des p inconnues H_i ; et $\partial H/\partial t$ est la dérivée de H , autrement dit, un vecteur des p dérivées des inconnues $\partial H_i/\partial t$.

Il y a deux méthodes fondamentales pour résoudre le système différentiel de (10.2.9): la méthode intégrale et la méthode différentielle.

a) Méthode intégrale

Une intégration directe du système différentiel nous donne la solution:

$$H^t = (H^0 - M^{-1}Q) \exp(S^{-1}Mt) + M^{-1}Q \quad (10.2.10)$$

où l'exponentielle d'une matrice est définie comme:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

et où I est la matrice identité, et H^0 le vecteur des conditions initiales, c'est-à-dire le vecteur H^t pour $t = 0$; Q est supposé être indépendant du temps.

Il est alors possible d'approximer l'opérateur exponentiel de la matrice par un opérateur polynomial de matrice et, en principe, de résoudre (10.2.10) pour un temps t quelconque. En principe, on utilise de grands pas de temps à cause de l'erreur inhérente à l'approximation polynomiale et aussi parce que Q varie généralement avec le temps et ne peut être considéré comme constant que pour un pas de temps donné.

Cette méthode a été utilisée avec succès par Emsellem et Ledoux (1971), mais l'usage n'en est pas très répandu.

b) Méthode différentielle

Cette approche est très largement utilisée. Elle consiste en une approximation de la dérivée du temps par une différence finie $\partial H/\partial t = (H^{t+\Delta t} - H^t)/\Delta t$, où les indices supérieurs représentent le temps où le vecteur H est considéré et où Δt est le pas de temps de l'approximation. Ceci constitue, en fait, une expansion en séries de Taylor du premier ordre et peut s'écrire formellement de trois manières différentes.

1) *Approximation explicite*: L'expansion de Taylor s'écrit:

$$H^{t+\Delta t} = H^t + \Delta t \frac{\partial H^t}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 H^t}{\partial t^2} + \dots \quad (10.2.11)$$

Au premier ordre et en prenant en compte (10.2.9):

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} = \frac{\partial H^t}{\partial t} = S^{-1}MH^t - S^{-1}Q^t$$

Remarquez que nous avons écrit (10.2.9) au temps t pour les deux membres de l'équation. En réarrangeant, nous avons:

$$H^{t+\Delta t} = H^t + \Delta t(S^{-1}MH^t - S^{-1}Q^t) \quad (10.2.12)$$

Etant donné H^t , $H^{t+\Delta t}$ s'obtient donc *explicitement*, autrement dit, en multipliant simplement le vecteur H^t par une matrice en ajoutant quelques termes. Quand nous regardons l'approximation implicite, la simplicité de (10.2.12) devient évidente. Notez que S^{-1} , l'inverse d'une matrice diagonale, n'est qu'une matrice diagonale ayant $1/|D_i|S_i$ comme coefficient sur la diagonale. La solution de (10.2.9) s'obtient donc pour chaque pas de temps successif. Etant donné les conditions initiales H^0 , on calcule d'abord H^1 , ensuite H^2 , et ainsi de suite. La longueur des pas de temps Δt , ainsi que le terme source/puits Q^t , peuvent varier au cours de la simulation.

En général, de petits pas de temps sont utilisés au début de la simulation ou chaque fois que Q^t change de manière significative (voir § 10.6).

Il y a cependant une limite à la longueur du pas de temps. Si $\Delta t > \Delta t_c$, ce que l'on appelle le pas de temps critique, l'approximation explicite devient instable. Ceci est facile à comprendre à partir de (10.2.12). Si, au temps t , une petite erreur d'approximation ε^t a été faite dans l'estimation de H^t , alors, au temps $t + \Delta t$, cette erreur est multipliée par $(\Delta t S^{-1} M)$. Si la norme de cette matrice est supérieure à 1, les erreurs sont amplifiées d'un pas de temps à l'autre et, très vite, les résultats deviennent dénués de sens. Écrivons explicitement une équation du système linéaire (10.2.12):

$$H_i^{t+\Delta t} = H_i^t + \frac{\Delta t}{|D_i|S_i} [C_{ij}(H_j^t - H_i^t) + C_{ik}(H_k^t - H_i^t) + \dots - Q_i^t]$$

Comme les C_{ij} sont positifs, il est évident que le coefficient le plus grand de la matrice $(\Delta t S^{-1} M)$ est:

$$\frac{\Delta t \sum_j C_{ij}}{|D_i|S_i}$$

où la sommation sur j est étendue à trois nœuds du nœud i .

Comme ce coefficient doit être plus petit que 1 pour toutes les équations du système linéaire, le pas de temps critique Δt_c est:

$$\Delta t_c = \min_i \frac{|D_i|S_i}{\sum_j C_{ij}}$$

Quand on utilise l'approximation explicite, il faut d'abord estimer Δt_c , et ensuite maintenir $\Delta t < \Delta t_c$. Notez qu'en général, Δt_c dépend de la surface de la plus petite maille du maillage.

2) *Approximation implicite*: L'expansion de Taylor s'écrit:

$$H^t = H^{t+\Delta t} - \Delta t \frac{\partial H^{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 H^{t+\Delta t}}{\partial t^2} + \dots \quad (10.2.13)$$

De la même manière que précédemment, au premier ordre, et en prenant en compte (10.2.9):

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} = \frac{\partial H^{t+\Delta t}}{\partial t} = S^{-1} M H^{t+\Delta t} - S^{-1} Q^{t+\Delta t}$$

Ici (10.2.9) est écrite au temps $t + \Delta t$ dans les deux membres de l'équation. En réarrangeant:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} S - M \right) H^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} S H^t - Q^{t+\Delta t} \quad (10.2.14)$$

Maintenant, la solution de ce système linéaire n'est plus aussi simple: il faut inverser la matrice $[(1/\Delta t)S - M]$ (voir § 10.4). Étant donné les conditions initiales H^0 , on peut d'abord calculer H^1 en résolvant (10.2.14), ensuite H^2 , etc... Cependant, à chaque pas de temps, il faut résoudre un système linéaire, ce qui demande beaucoup de temps ordinateur comparé à l'approximation explicite. L'avantage de l'approximation implicite est qu'il n'y a pas de critère de stabilité: la méthode est stable pour toute longueur de pas de temps. Toutefois, comme pour toute autre approximation du premier ordre, plus le pas de temps est court, meilleure sera la précision (voir § 10.6).

3) *Approximation de Crank-Nicholson*: Soustrayons l'expansion implicite de Taylor (10.2.13) de l'expansion explicite (10.2.11). Nous trouvons:

$$\begin{aligned} H^{t+\Delta t} - H^t &= H^t - H^{t+\Delta t} + \Delta t \left(\frac{\partial H^t}{\partial t} + \frac{\partial H^{t+\Delta t}}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H^t}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 H^{t+\Delta t}}{\partial t^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Nous observons que les termes du second ordre sont proches de zéro, si bien que l'approximation du premier ordre est presque exacte au troisième ordre. Elle devient:

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H^t}{\partial t} + \frac{\partial H^{t+\Delta t}}{\partial t} \right)$$

En utilisant (10.2.9), nous pourrions remplacer $\partial H/\partial t$ par $S^{-1}(MH - Q)$ à chaque pas de temps. Par souci de généralité, refaisons cette soustraction, mais cette fois-ci en multipliant (10.2.13) par α et (10.2.11) par $(1 - \alpha)$. Nous trouvons:

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} = (1 - \alpha) \frac{\partial H^t}{\partial t} + \alpha \frac{\partial H^{t+\Delta t}}{\partial t}$$

Le paramètre α peut varier entre 0 et 1. Pour $\alpha = 0$, l'approximation est totalement explicite. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'approximation porte le nom de "Crank-Nicholson", mais d'autres valeurs de α entre 0 et 1 peuvent être employées. En utilisant (10.2.9) et en réarrangeant:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} S - \alpha M \right) H^{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} S + (1 - \alpha) M \right] H^t - (1 - \alpha) Q^t - \alpha Q^{t+\Delta t} \quad (10.2.15)$$

En ce qui concerne l'approximation implicite, il faut résoudre un système linéaire à chaque pas de temps si $\alpha \neq 0$. On peut cependant démontrer que pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, la méthode est instable pour des pas de temps plus grands que le pas de temps critique, que nous avons défini pour l'approximation explicite. En pratique, on utilise toujours un α légèrement plus grand que 0,5, par exemple 0,55 ou 0,6.

Narasimhan et Neuman (1977) ont également proposé une méthode explicite-implicite où α varie d'une maille à l'autre dans le domaine. Si un critère local de stabilité est satisfait pour une longueur donnée du pas de temps, α est fixé à zéro et l'équation de cette maille-là est résolue explicitement. Ensuite, pour toutes les mailles où le critère de stabilité n'est pas satisfait, α est fixé à 1 et le système d'équations est résolu implicitement.

4) *Approximation de Gear*: Jusqu'ici, l'interpolation utilisée pour H entre t et $t + \Delta t$ a toujours été linéaire. L'approximation de Gear utilise, quant à elle, une approximation parabolique dans le temps:

$$H_i = at^2 + bt + c$$

A chaque pas de temps, les trois coefficients a, b et c de chaque maille sont ajustés par l'imposition de trois conditions sur la parabole: celle-ci passe à travers les deux pas de temps précédents, $H_i^{t-\Delta t}$ et H_i^t , et sa dérivée au temps $t + \Delta t$ est égale à celle donnée par (10.2.9) écrite à $t + \Delta t$. Par exemple, si Δt est le même pour deux pas de temps consécutifs, nous trouvons:

$$H^{t+\Delta t} = -\frac{1}{3} H^{t-\Delta t} + \frac{4}{3} H^t + \frac{2}{3} \Delta t (S^{-1} M H^{t+\Delta t} - S^{-1} Q)$$

En réarrangeant, il nous faudrait résoudre un système linéaire à chaque pas de temps. L'approximation de Gear est stable pour tous les pas de temps, et elle est également juste au second ordre. Comme il faut connaître H pour deux pas de temps consécutifs, une autre méthode (par exemple, implicite) doit être utilisée pour le premier pas de temps.

10.2.7. Problème non linéaire

Un problème non linéaire très courant dans la modélisation des eaux souterraines est celui des nappes libres. Nous avons vu dans § 5.1.d. que, dans les équations de l'écoulement ((5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3)), la transmissivité est fonction de l'épaisseur saturée de l'aquifère, c'est-à-dire de la charge hydraulique h .

Le problème des nappes libres peut être traité dans les modèles numériques en changeant itérativement la valeur des coefficients de la matrice M dans (10.2.9). Cette approche est décrite dans le § 10.4.2.3, aussi bien pour le régime permanent que pour le régime transitoire.

Il faut aussi vérifier que la cote de la charge hydraulique dans un modèle de nappe libre ne tombe pas au-dessous du substratum ou ne s'élève au-dessus de la surface du sol. Dans le premier cas, l'aquifère devient, en fait, sec, et la maille correspondante du domaine doit être éliminée, ce qui introduit une condition aux

limites de flux nul. En pratique, il est plus simple d'accepter que le modèle comprenne une charge calculée, qui peut se situer au-dessous du substratum, et de donner à la maille une transmissivité *positive* très petite, par exemple 10^{-2} ou 10^{-3} fois la valeur normale dans le domaine. Le pourtour de cette maille devient, en pratique, une limite à flux nul, mais s'il y a de l'infiltration ou si la charge augmente de nouveau (en régime transitoire), la maille peut redevenir une partie active de l'aquifère. Dans le second cas, quand la charge monte au-dessus de la surface du sol, cela veut dire qu'un exutoire a été créé (source, écoulement dans une rivière, etc...). Le pourtour de la maille correspondante du modèle devient une limite à charge imposée où la charge imposée est la cote du sol (cote de la source, du lit de la rivière dans la maille, etc...). Il faut alors vérifier que le flux dans cette maille demeure un flux sortant. Lorsque cela cesse d'être vrai dans un état transitoire, la charge tombe au-dessous de la surface du sol, et la maille ne doit plus être considérée comme une limite à charge imposée. Elle ne peut rester une limite à charge imposée que s'il y a assez d'eau de surface présente dans cette maille pour garantir qu'un flux d'eau entre dans le modèle (par exemple, de l'eau arrivant de l'amont dans une rivière). Voir au § 10.2.10 une discussion sur la façon d'appliquer, en pratique, une limite à charge imposée à une rivière.

Un autre problème non linéaire est celui du dénoyage d'une nappe captive. Dès que la charge hydraulique d'une nappe captive tombe au-dessous de la cote du toit,

- 1) le coefficient d'emmagasinement S dans la maille doit être remplacé par la porosité de drainage ω_d et
- 2) la transmissivité peut devenir fonction de l'épaisseur saturée de l'aquifère, c'est-à-dire de la charge.

Remarquez que la transmissivité dans une nappe libre est, par définition:

$$T = \int_{\sigma}^h K dz$$

où σ est le substratum et h la charge. La variation de T avec h peut parfois être négligée si la distribution de $K(z)$ est telle que des matériaux très perméables se trouvent au fond de l'aquifère et uniquement des matériaux peu perméables en haut.

Les équations de l'écoulement multiphasique (§ 9.1.e) et en zone non saturée (§ 9.2.1) sont également fortement non linéaires. La méthode utilisée pour les résoudre est décrite au § 10.4.2.30

10.2.8. Systèmes multicouches

Dans les grands bassins sédimentaires, on trouve souvent des séries de couches perméables et imperméables (ou semi-perméables) qui forment, respectivement, des aquifères, des aquitards et des aquicludes. Les aquitards sont des couches où l'eau ne peut pas être prélevée dans des puits, mais qui sont suffisamment perméables pour permettre une drainance significative vers les aquifères voisins. Les aquicludes sont des couches moins perméables, à travers lesquelles la drainance est insignifiante au cours d'un essai de pompage dans un aquifère voisin, mais qui peuvent permettre une drainance significative à l'échelle régionale (voir Javandel et Witherspoon, 1969; Neuman et Witherspoon, 1969a,b). De tels systèmes sont connus sous le nom de systèmes multicouches.

Il est facile de modéliser les systèmes multicouches. On fait les hypothèses suivantes:

- 1) l'écoulement est essentiellement parallèle aux couches dans les aquifères;
 - 2) il est généralement orthogonal aux couches dans les aquitards et les aquicludes;
 - 3) la drainance peut être introduite comme terme source dans les équations de l'écoulement des aquifères.
- Cette dernière hypothèse a d'ailleurs été démontrée au § 5.3.9.

Le modèle représentera chaque aquifère du système par une couche de mailles à deux dimensions. Afin de rendre le problème plus facile à traiter, on choisit des mailles de taille identique pour les deux aquifères superposés. Ce n'est que dans le cas des mailles gigognes que l'on peut utiliser des mailles superposées ayant une différence de taille d'un rang (Fig. 10.9).

Il y a deux manières d'estimer le flux de drainance à travers un aquitard séparant deux mailles superposées:

- Appliquer la loi de Darcy directement et écrire le flux de drainance ainsi:

$$F = -\frac{K'}{e'}(H_b - H_t) \quad (10.2.16)$$

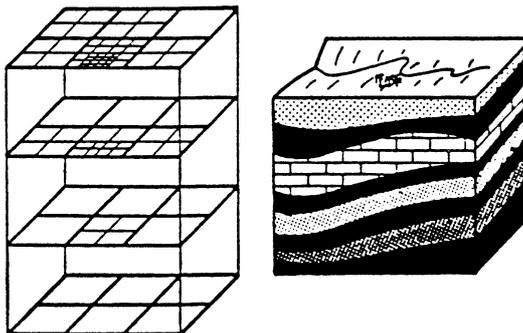


Figure 10.9. 12.9. Systèmes multicouches

où H_t et H_b sont les charges dans les mailles en haut et en bas respectivement. On intègre ensuite ce flux F sur la taille de la maille. En différences finies, cela signifie multiplier F par la surface de la maille. En éléments finis (voir § 10.3), puisque H_b et H_t varient sur le domaine d'intégration D_i , on fait cette intégration, soit après avoir substitué l'expression de H dans (10.2.16) comme pour la formulation transitoire "conforme" dans (10.3.10), soit en utilisant la valeur au nœud de H_i dans D_i comme pour la formulation "concentrée". Avec la formulation de Galerkin, cette intégration est, de plus, pondérée par une fonction de base N_I comme dans (10.3.17).

On ajoute le terme source qui en résulte au second membre de l'équation (10.2.6) en différences finies, ou de l'équation (10.3.7) en éléments finis, pour le système d'équation de la couche t , et on le soustrait du second membre des mêmes équations pour la couche b (il faut se rappeler que le terme source de l'équation de l'écoulement est négatif pour une source et positif pour un puits).

Le terme source ainsi obtenu est ensuite transféré au premier membre de l'équation, ce qui ajoute une nouvelle inconnue au système linéaire, par exemple:

$$C_{ij}(H_j - H_i) + C_{ik}(H_k - H_i) + \dots + C_{it}(H_t - H_i) = Q_i$$

où H_t est la charge dans le maillage en haut de la maille I .

Ceci ne fait qu'augmenter la taille du système linéaire qui doit être résolu, et rendre chaque couche dépendante du comportement des autres (ce qui se passe en réalité). On peut avoir deux de ces termes en même temps, un pour un aquifère sus-jacent et un autre pour un aquifère sous-jacent.

Cette expression est strictement valable pour un régime permanent; dans un régime transitoire, elle suppose que le régime permanent du flux à travers l'aquitard est atteint instantanément et néglige tout emmagasinement d'eau dans les aquitards.

Pour étendre sa validité, il faut ajouter la moitié du coefficient d'emmagasinement de l'aquitard à chacun des coefficients d'emmagasinement de l'aquifère sus-jacent et de l'aquifère sous-jacent: de cette façon, l'eau emmagasinée dans l'aquitard est prise en compte. Toutefois, la validité de l'hypothèse d'un débit permanent à travers l'aquitard peut uniquement être contrôlée par:

$$\exp\left(-\frac{\pi^2 K' \Delta t}{S' e'^2}\right) \ll 0.5 \quad (10.2.17)$$

où K' est la conductivité hydraulique, S' est le coefficient d'emmagasinement spécifique (voir (5.3.8)), e' est l'épaisseur et Δt = longueur du pas de temps du calcul transitoire de l'aquitard.

Si l'hypothèse d'un régime permanent dans l'aquitard n'est pas satisfaite, il est possible de se servir d'une solution analytique de l'équation de l'écoulement en une dimension dans l'aquitard et d'estimer analytiquement le flux de drainage F à la limite des aquifères voisins. Toutefois, cette expression analytique comporte une convolution et les calculs en sont un peu plus longs:

$$F^t(t) = - \int_0^t \frac{\partial H_b}{\partial t} f^b(t - \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial H_t}{\partial t} f^t(t - \tau) d\tau$$

avec

$$f(t) = \frac{K'}{e'} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha)^n \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 K' t}{S' e'^2} \right) \right]$$

avec $\alpha = -1$ pour f^b et $+1$ f^t . F^t est le flux de drainance dans la couche supérieure.

Néanmoins, on peut calculer les intégrales de convolution par récurrence sans qu'il soit nécessaire de mettre en mémoire la valeur de H en tant que fonction du temps (voir Marsily et al., 1978; Trescott et al., 1976; Herrera et Yates, 1977; Hennart et al., 1981). L'équation (10.2.17) vient de cette solution analytique.

10.2.9. Systèmes à trois dimensions

Dans le cas où une approximation multicouches ou à deux dimensions n'est pas valable, c'est-à-dire quand il faut estimer les composantes réelles du flux en trois dimensions, alors on est obligé de construire un réseau en trois dimensions. En différences finies, on utilisera des cubes ou des parallélépipèdes. En éléments finis, des tétraèdres (éléments linéaires) ou des hexaèdres (éléments bilinéaires) seront préférés. Comme pour les systèmes multicouches, ceci revient à ajouter des termes à l'expression discrétisée de l'équation de l'écoulement afin de représenter les flux dans, par exemple, six directions pour un cube (nord, sud, est, ouest, haut et bas autour du cube central). Les différences sont alors que 1) nous devons utiliser la conductivité hydraulique K et le coefficient d'emmagasinement spécifique S , à la place de T et S employés en deux dimensions; 2) les intégrales de contour de T le long de la limite d'une maille deviennent maintenant une intégrale de surface de K sur le côté du cube; 3) l'intégrale de surface de S devient une intégrale de volume de S ; et 4) le terme source doit être défini par unité de volume et ensuite intégré à l'intérieur du volume de chaque élément.

L'équation linéaire qui en résulte est, cependant, identique à (10.2.6) ou (10.3.7), mais les C_{ij} sont donnés par ces intégrales de surface.

Remarquez que si le milieu est anisotrope, le rapport entre les dimensions horizontales-verticales de la maille doit être ajusté de façon à ce que les C_{ij} obtenus soient du même ordre de grandeur dans les trois directions. Sinon, le système linéaire ne peut être résolu avec précision à cause des erreurs d'arrondi (voir § 10.2.4).

Il est extrêmement coûteux d'utiliser un modèle à trois dimensions puisque le nombre de mailles devient rapidement énorme. Freeze (1971) a calculé l'écoulement en trois dimensions sur un bassin versant en incluant et la zone saturée et la zone non saturée. En pratique, la modélisation en trois dimensions ne s'utilise que pour des problèmes locaux (par exemple, barrage, dénoyage d'une excavation).

Il vaut souvent beaucoup mieux étudier l'écoulement en deux dimensions sur plusieurs sections du milieu plutôt que sur un modèle à trois dimensions. Pour ce type de modélisation, on étudie une épaisseur unité du milieu, orthogonale au plan de la section. Par conséquent, on utilise K et S , au lieu de T et S , généralement employés dans les équations à deux dimensions.

Sur de telles sections, il est souvent nécessaire de définir la position de la surface libre. En régime permanent, ceci peut se faire itérativement en imposant d'abord la condition $h = z$ sur une surface choisie *a priori* (voir § 6.3.d) en vérifiant ensuite que la seconde condition ($K \partial h / \partial n$ imposé) est également satisfaite. Sinon, la position de la surface est modifiée. Avec la méthode des éléments finis, on obtient plus de précision sur de tels problèmes de surface mobile qu'avec celle des différences finies (cf. Neuman et Witherspoon, 1970, 1971).

En régime transitoire, il est possible de déplacer une surface libre de la même manière, mais cela ne reproduira pas correctement les processus physiques de drainage/imbibition d'un milieu non saturé. Il vaut donc mieux résoudre un problème complet d'écoulement saturé-non saturé en utilisant l'équation de Richard, la charge étant l'inconnue (voir § 9.2.1), et déterminer ensuite la position de la surface libre dans le domaine qui sera le point où $p = 0$ (ou $h = z$) (cf. Freeze, 1971).

10.2.10. Comment représenter les rivières

Pour les aquifères non captifs en zone tempérée, les rivières jouent un rôle de source ou de puits vis-à-vis des aquifères. On peut les représenter en imposant la charge à chaque nœud du modèle où coule une rivière. Cette charge est alors la cote de l'eau dans le cours d'eau.

En pratique, les lits des rivières sont très souvent couverts d'une couche de limon, et le flux échangé entre la rivière et l'aquifère crée une différence de charge entre les deux. Au § 6.3.c, nous avons montré que celle-ci peut être représentée par une condition aux limites de Fourier. En modélisant un aquifère, on préfère donc imposer la charge dans la rivière à une maille qui est superposée à l'aquifère et liée à celle-là par un coefficient d'échange semblable à celui que l'on utilise pour représenter la drainance à travers un aquitard en régime permanent,

$$C_{ir} = \frac{K' a'^2}{e'}$$

où K' est la conductivité hydraulique de la couche de limon sur le lit de la rivière, e' est l'épaisseur de cette couche de faible conductivité entre la rivière et l'aquifère, et a'^2 est la surface de la partie de la rivière se trouvant en contact avec l'aquifère dans la maille.

Le terme $C_{ir}(H_r - H_i)$, où H_r est la charge imposée dans la rivière, est ensuite ajouté au premier membre de l'équation de l'écoulement, par exemple (10.2.6). En général, on ne mesure ni K' , ni e' , ni a'^2 . On ajuste le coefficient C_{ir} de façon à ce que la différence de charge $H_r - H_i$ réelle observée soit reproduite par le modèle quand le bilan des flux d'écoulement est respecté (par exemple, écoulement total drainé par la rivière).

Même s'il n'y a pas de différence de charge notable entre le cours d'eau et l'aquifère, on emploie néanmoins une telle représentation si C_{ir} est grand. Il est ainsi très facile de calculer l'écoulement échangé entre la rivière et l'aquifère et (si nécessaire) de limiter l'écoulement à une valeur prescrite. Ceci peut être nécessaire quand la rivière alimente l'aquifère. Si la charge dans l'aquifère décroît de manière importante au voisinage d'un cours d'eau, elle peut, en fait, atteindre un niveau où les deux ne sont plus reliés: soit le milieu devient non saturé, soit un dôme de recharge avec un gradient vertical de 1 se forme sous la rivière. Dans les deux cas, le débit d'alimentation n'est plus fonction de la charge de l'aquifère et devient une valeur constante imposée. En modélisation d'eau souterraine, une telle représentation des rivières par un maillage superposé à charge imposée, un coefficient d'échange et un débit d'alimentation limité imposé est connu sous le nom de drain à débit limité.

Dans les zones arides, où les rivières sont en général sèches sauf pendant les périodes de crues, la recharge à travers le lit de la rivière est un flux imposé qui est fonction du volume global de chaque crue. Cette recharge peut mettre très longtemps avant d'atteindre l'aquifère si la couche non saturée est épaisse. Des méthodes pour estimer ce flux, ainsi que le temps de transit, ont été proposées par Besbes et al. (1978).

10.2.11. Estimation de l'alimentation régionale

Pour une nappe libre, le terme source q représente principalement l'alimentation de l'aquifère. Au § 1.3, nous avons montré comment l'infiltration (l'alimentation) peut être grossièrement estimée à partir de la précipitation et des données de l'évapotranspiration potentielle au moyen d'un modèle de réservoir simple représentant la réserve d'eau dans la zone racinaire des plantes. Bien que ce genre de modèle soit très grossier, c'est le seul qui puisse être appliqué en pratique à la modélisation régionale de l'eau souterraine. Dans les modèles de réservoir plus sophistiqués, la vitesse à laquelle l'évapotranspiration retire de l'eau du réservoir est considérée comme étant fonction de la saturation de celui-ci, ce qui est également le cas de l'infiltration et du ruissellement. Dans les zones où le ruissellement est important, il est donc intéressant de pouvoir calculer simultanément toutes les composantes du bilan des eaux à la surface du sol (ruissellement, infiltration et évapotranspiration), et de vérifier ensuite ces calculs en modélisant l'écoulement des eaux de surface afin de comparer l'écoulement calculé à celui que l'on a mesuré aux stations de jaugeage en rivière. Ces modèles portent le nom de modèles couplés eaux de surface-eaux souterraines. Le couplage prend également en compte l'infiltration dans les aquifères ou le drainage de ceux-ci par les rivières. De tels modèles ont été réalisés par Girard et al. (1981) et Ledoux et al. (1984) en utilisant des mailles gigognes carrées aussi bien

pour l'aquifère que pour le ruissellement dans la couche de surface. Ce type de mailles convient bien à une représentation du réseau fluvial par des éléments de petite taille.

Si la zone non saturée entre la surface du sol et l'aquifère n'est pas trop épaisse (par exemple, quelques mètres), l'infiltration sous la zone racinaire est très rapidement transférée à l'aquifère: la recharge est égale à l'infiltration. Toutefois, si cette zone non saturée est très épaisse (des dizaines de mètres, par exemple), le retard et l'amortissement seront considérables et la recharge à la surface de l'aquifère sera en fait une "convolution" de l'infiltration à la surface du sol par une "fonction de transfert", qui représente l'écoulement vertical à travers la zone non saturée. On pourrait, en principe, essayer de résoudre l'équation de l'écoulement non saturé afin de représenter ce transfert, mais cela serait bien trop compliqué, coûteux et difficile (à cause du manque de données sur les propriétés de la zone non saturée) pour être utilisable en modélisation régionale des eaux souterraines.

Besbes et Marsily (1984) ont décrit comment une convolution linéaire simple peut être estimée à partir des données de la précipitation et de la piézométrie. Morel-Seytoux (1984) a également montré la relation entre cette convolution linéaire et la véritable équation non linéaire de l'écoulement non saturé.

10.2.12. Représentation des puits

En modélisation régionale de l'eau souterraine, la dimension d'un puits est généralement beaucoup trop petite pour qu'il soit possible de le décrire correctement par le maillage d'un modèle (par exemple, le diamètre du puits peut être de 0,5 m tandis que la taille des mailles est de 200×200 m). Il peut y avoir souvent plusieurs puits dans une maille donnée.

Dans l'équation différentielle partielle qui représente l'écoulement dans l'aquifère, le terme puits q pour un tel puits serait:

$$q = Q_0 \delta(x_0, y_0)$$

où Q_0 est le débit du puits, x_0 et y_0 sont des coordonnées du puits, et δ est la fonction de Dirac au point (x_0, y_0) , c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \infty & \text{si} & & (x, y) &= (x_0, y_0) \\ \delta(x, y) &= 0 & \text{si} & & (x, y) &\neq (x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\int_D \int \delta \, dx dy = 1 \quad \forall \quad D \subset (x_0, y_0)$$

Dans la forme discrétisée correspondante de l'équation de l'écoulement, le terme intégré source/puits est:

$$Q_i = \int_{D_i} \int q \, dx dy = Q_0 \quad \text{si} \quad q = Q_0 \delta(x_0, y_0)$$

Ainsi, Q_i sera la somme algébrique de l'intégrale du terme source distribué (qui représente l'alimentation) et des véritables débits d'écoulement des différents puits dans le maillage.

S'il n'y a qu'un puits, par exemple, dans une maille carrée, il est encore possible d'estimer l'ordre de grandeur de la charge hydraulique dans le puits à partir de la valeur calculée de la charge au nœud de la maille. Ce calcul est fondé sur l'expression de Dupuit pour le régime permanent (cf. § 7.3.a).

L'équation de l'écoulement pour la maille I en régime permanent s'écrirait, comme dans (10.2.6):

$$\sum_j C_{ij} (H_j - H_i) = Q_i$$

La sommation sur j peut s'étendre aussi bien horizontalement que verticalement dans les systèmes multicouches; Q_i est le terme source intégré, y compris le débit d'écoulement q_i , dans le puits. S'il n'y avait eu aucun prélèvement dans ce puits, la charge calculée \bar{H}_i aurait été donnée par:

$$\sum_j C_{ij}(H_j - \bar{H}_i) = Q_i - q_i$$

Ceci suppose que la charge dans les mailles voisines H_j n'est pas modifiée par le terme q_i . Autrement dit, $\bar{H}_i - H_i$ est le rabattement supplémentaire causé par le puits qui peut être calculé par le modèle numérique entre le centre de la maille I et les mailles voisines J, c'est-à-dire une distance a si a est la taille de la maille carrée. Ce que nous recherchons, en fait, est le rabattement véritable pour un puits de rayon r_0 entre ce puits et les mailles voisines à une distance a . Ceci s'estime par la formule de Dupuit de la manière suivante:

$$s = \frac{q_i}{2\pi T_i} \ln \frac{a}{r_0}$$

où T_i est la transmissivité dans la maille I.

Des deux expressions précédentes, on peut dériver la charge h_i dans le puits:

$$h_i = H_i - q_i \left(\frac{1}{2\pi T_i} \ln \frac{a}{r_0} - \frac{1}{\sum_j C_{ij}} \right)$$

où H_i est la charge dans le forage du puits et H_i la charge calculée par le modèle. Cette expression est approximée et ne prend pas en compte les pertes quadratiques de charge, qui doivent être soustraites si elles sont significatives.

Dans un régime transitoire, la même expression est utilisée en supposant que le profil logarithmique de la formule de Dupuit est valable à l'échelle de la maille. Ceci est vrai dès que l'expression logarithmique de Jacob peut être utilisée à la distance a .

10.3. ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une technique puissante et très flexible pour intégrer une équation différentielle partielle sur un espace. Elle comporte trois étapes principales:

- 1) Le domaine est décomposé en un ensemble "d'éléments" qui, en deux dimensions, sont généralement des triangles ou des quadrilatères, mais qui peuvent avoir des formes plus complexes.
- 2) Sur chaque élément, la fonction inconnue $h(x, y)$ est décomposée sur un ensemble de fonctions de base connues $b_k(x, y)$ tel que:

$$h(x, y) = \sum_1^m a_k b_k(x, y)$$

Les inconnues sont alors les coefficients a_k dans chaque élément.

3) On écrit une équation intégrale quelconque afin de s'assurer que $h(x, y)$ vérifie approximativement l'équation différentielle partielle en question ou celle de bilan de masse.

Nous limiterons cette présentation à deux exemples: l'interpolation linéaire sur des triangles et les éléments linéaires isoparamétriques avec la méthode de Galerkin. On trouvera de bonnes descriptions de cette méthode dans Remson et al. (1971), Strang et Fix (1973), Zienkiewicz (1977), Pinder et Gray (1977), Mitchell et Wait (1977), Dhatt et Touzot (1981), Wang et Anderson (1982).

10.3.1. Eléments finis linéaires sur des triangles

Nous débuterons par l'équation de régime permanent (10.2.1). Le domaine est décomposé en un ensemble d'éléments triangulaires. Soit IJK (Fig. 10.10) un de ces éléments. Sur chaque triangle, la fonction inconnue $h(x, y)$ est supposée linéaire:

$$h(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (10.3.1)$$

Les inconnues sont a_0, a_1 et a_2 . Lorsque nous écrivons une équation de bilan, notre premier réflexe est d'utiliser la forme intégrée (10.2.3) de l'équation de l'écoulement (cf. § 10.2.3.) sur la surface du triangle IJK. Cependant, cela ne nous mènerait à rien puisqu'une expression linéaire pour h telle que (10.3.1) vérifierait $\text{div}(\mathbf{T} \text{ grad } h) = 0$ si le tenseur \mathbf{T} est constant sur le triangle. Ainsi, l'équation de bilan ne peut jamais être vérifiée sur un élément linéaire, à moins que le terme source $q \equiv 0$.

Nous choisirons plutôt un polygone entourant chaque nœud I du maillage. Ces polygones doivent diviser le domaine, c'est-à-dire que l'union de tous les polygones doit être égale au domaine lui-même et leur intersection être ϕ . En général, on considère l'union des médianes de chaque triangle (Fig. 10.11). Soit D_i ce polygone et Γ_i son périmètre. L'équation intégrée de l'écoulement s'écrit comme dans (10.2.3):

$$\int_{\Gamma_i} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \int_{D_i} \int q \, dx dy \quad (10.3.2)$$

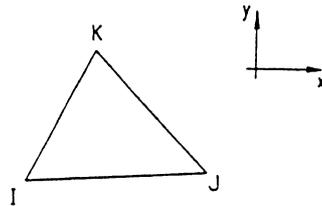


Figure 10.10. Triangle pour des éléments finis linéaires.

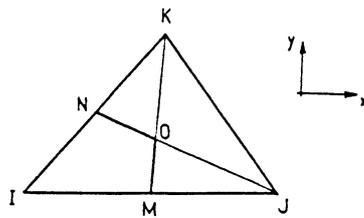


Figure 10.11. Polygone d'intégration pour un maillage d'éléments finis.

Nous supposons initialement que x et y sont les directions principales du tenseur \mathbf{T} dans le triangle IJK. Soient MO et ON les deux côtés de Γ_i à l'intérieur de IJK.

Il faut calculer l'intégrale de contour le long de MON. On peut le faire directement, mais étant donné que h à l'intérieur de IJK est une fonction linéaire des coordonnées, nous savons que $\text{div}(\mathbf{T} \text{ grad } h) = 0$, c'est-à-dire:

$$\int_{\text{MON}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds + \int_{\text{NIM}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = 0$$

Etant donné (10.3.1) et les coordonnées I, J et K, il est plus simple de calculer la seconde intégrale. Avec de l'algèbre très simple, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{\text{NI}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds &= \frac{1}{2} T_x a_1 (y_i - y_k) - \frac{1}{2} T_y a_2 (x_i - x_k) \\ \int_{\text{IM}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds &= \frac{1}{2} T_x a_1 (y_j - y_i) - \frac{1}{2} T_y a_2 (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\text{MON}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = \frac{1}{2} T_x a_1 (y_j - y_k) - \frac{1}{2} T_y a_2 (x_j - x_k) \quad (10.3.3)$$

Au lieu d'employer les inconnues a_0, a_1 et a_2 dans (10.3.1), on préfère en général introduire les valeurs de la charge aux nœuds I, J et K. Ils vérifient:

$$\begin{aligned} H_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \\ H_j &= a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j \\ H_k &= a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

La charge à un nœud I doit, naturellement, être la même pour tous les triangles dont I est le sommet. En résolvant (10.3.4), nous obtenons:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(y_i - y_k)(H_i - H_j) - (y_i - y_j)(H_i - H_k)}{(x_i - x_j)(y_i - y_k) - (x_i - x_k)(y_i - y_j)} \\ a_2 &= \frac{(x_i - x_j)(H_i - H_k) - (x_i - x_k)(H_i - H_j)}{(x_i - x_j)(y_i - y_k) - (x_i - x_k)(y_i - y_j)} \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

et, en introduisant ces valeurs dans (10.3.3):

$$\begin{aligned} \int_{\text{MON}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds \\ = \frac{1/2}{(x_i - x_j)(y_i - y_k) - (x_i - x_k)(y_i - y_j)} \\ \times \{ [T_x(y_i - y_k)(y_j - y_k) + T_y(x_i - x_k)(x_j - x_k)](H_i - H_j) \\ - [T_x(y_i - y_j)(y_j - y_k) + T_y(x_i - x_j)(x_j - x_k)](H_i - H_k) \} \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

ou

$$\int_{\text{MON}} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds = C_{ij}(H_i - H_j) + C_{ik}(H_i - H_k)$$

Nous retournons à l'équation de bilan (10.3.2) et construisons toute l'intégrale de contour sur Γ_i en ajoutant des termes analogues calculés dans chacun des triangles dont I est le sommet. Finalement, nous avons:

$$C_{ij}(H_i - H_j) + C_{ik}(H_i - H_k) + C_{il}(H_i - H_l) + \dots = Q_i \quad (10.3.7)$$

où Q_i est l'intégrale du terme source sur D_i .

On peut écrire des équations telles que (10.3.7) pour chaque nœud I où la charge n'est pas imposée.

Notez que cette expression ressemble beaucoup à (10.2.6), que nous avons obtenue en différences finies intégrées sur un polygone de forme quelconque. Les différences principales en sont les suivantes:

1) Le domaine d'intégration D_i n'est pas la maille élémentaire de l'approximation. Etant donné que nous avons utilisé ici des éléments triangulaires, D_i est constitué par des parties de tous les triangles dont I est le sommet. Si les valeurs des paramètres (par exemple, T) sont données sur les triangles élémentaires, alors T varie à l'intérieur de D_i , à l'opposé de ce qui est le cas en différences finies.

2) Les différences finies calculent des charges "moyennes" sur un polygone attribué à un nœud central sans faire d'hypothèse sur la forme de la variation de cette charge d'un nœud à un autre. Les éléments finis, au contraire, définissent précisément la variation de la charge à l'intérieur d'un élément - linéairement dans ce cas. On ne calcule les valeurs aux nœuds que pour des raisons pratiques, mais H est défini partout. La charge varie continuellement d'un élément triangulaire à un autre.

3) Toutefois, les flux le long du côté IJ d'un triangle sont discontinus: ils sont différents quand ils sont estimés dans les deux triangles qui ont IJ en commun. Les éléments finis linéaires ne conservent pas la masse sur un triangle élémentaire; ceci est le cas uniquement quand il s'agit d'un polygone entourant un nœud.

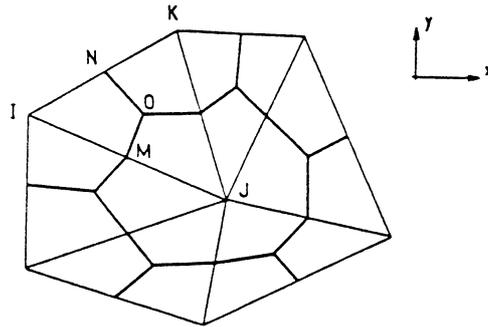


Figure 10.12. Conditions aux limites pour un maillage d'éléments finis.

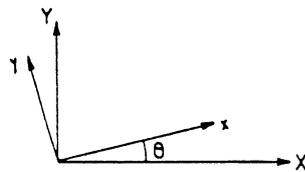


Figure 10.13. Rotation de l'axe pour prendre en compte l'anisotropie.

- Conditions aux limites

Si la charge est imposée le long d'une limite, les nœuds des triangles se trouvant sur cette limite auront une charge imposée. On n'écrira pas d'équations telles que (10.3.7) pour ces nœuds.

Si le flux est imposé le long d'un des côtés d'un triangle, par exemple IK (Fig. 10.12), alors les polygones D_i et D_k auront pour côtés IN et NK. Pour le polygone D_i , le flux le long de NI sera estimé en utilisant la condition aux limites imposées, et il sera introduit en tant que terme connu dans l'intégrale de contour totale de D_i dans l'équation (10.3.7). Remarquez que le flux le long de MON sera toujours estimé à l'intérieur de IJK par (10.3.6) sans aucun changement.

A l'opposé des différences finies, la limite doit suivre les côtés des éléments aussi bien pour les conditions de charges imposées que pour celles de flux imposés.

- Anisotropie

Dans (10.3.6), nous avons supposé que x et y sont des directions principales du tenseur d'anisotropie de la transmissivité à l'intérieur du triangle IJK. Si cela n'était pas le cas, (10.3.6) serait quand même applicable, dans la mesure où x et y forment maintenant un système local de coordonnées à l'intérieur de IJK, parallèle aux directions principales d'anisotropie.

Soient X, Y le système général de coordonnées et l'angle entre les deux. La rotation de l'axe (Fig. 10.13) donne:

$$\begin{aligned} x &= Y \cos \theta + Y \sin \theta \\ y &= -X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

ce qui peut être introduit dans (10.3.5). Par exemple, C_{ij} devient:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= T_x [(X_k - X_i) \sin \theta + (Y_i - Y_k) \cos \theta] \\ &\quad \times [(X_k - X_j) \sin \theta + (Y_j - Y_k) \cos \theta] \\ &\quad + T_y [(X_i - X_k) \cos \theta + (Y_i - Y_k) \sin \theta] \\ &\quad \times [(X_j - X_k) \cos \theta + (Y_j - Y_k) \sin \theta] \end{aligned}$$

où T_x et T_y sont toujours les transmissivités locales dans l'axe local de l'anisotropie. De telles corrections peuvent être introduites dans chaque triangle avec, si nécessaire, un angle θ différent.

- Régime transitoire

Dans un régime transitoire, il faut ajouter le terme suivant au second membre de (10.3.2) ou de (10.3.7):

$$\int_{D_i} \int S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy \quad (10.3.9)$$

Il y a deux moyens d'estimer ce terme: la formulation concentrée et la formulation conforme.

- Approximation concentrée

On fait l'hypothèse que $\partial h/\partial t$ à l'intérieur de D_i peut être approximé par $\partial H_i/\partial t$. Si S_i est l'intégrale de S sur D_i ,

$$S_i = \int_{D_i} \int S dx dy$$

alors, on ajoute le terme $S_i(\partial H_i/\partial t)$ au second membre de (10.3.7). La discrétisation de ce terme peut se faire exactement comme pour les différences finies; c'est-à-dire, explicitement, implicitement, etc... (cf. § 2.2.6.d).

- Formulation conforme

En réalité, l'expression linéaire de la charge sur chaque triangle (10.3.1) permet d'estimer (10.3.9) plus rigoureusement. Soit MONI (Fig. 10.11) la partie de D_i à l'intérieur du triangle IJK. Nous pouvons écrire:

$$\int_{\text{MONI}} \int S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy = \int \int_{\text{MONI}} S_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} (a_0 + a_1 x + a_2 y) dx dy \quad (10.3.10)$$

où S_{ijk} est le coefficient d'emmagasinement de l'élément IJK. Toutefois, dans (10.3.5), nous avons estimé a_1 et a_2 en tant que fonctions de H_i, H_j et H_k . Alors, a_0 peut être tiré de (10.3.4) comme suit:

$$a_0 = H_i - a_1 x_i - a_2 y_i \quad (10.3.11)$$

L'équation (10.3.10) devient:

$$\int_{\text{MONI}} \int S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy = S_{ijk} \left[\frac{\partial H_i}{\partial t} \int_{\text{MONI}} \int f(x, y) dx dy + \frac{\partial H_i}{\partial t} \int_{\text{MONI}} \int f'(x, y) dx dy + \frac{\partial H_k}{\partial t} \int_{\text{MONI}} \int f''(x, y) dx dy \right]$$

où f, f' et f'' sont des fonctions linéaires de x et y et des coefficients qui dépendent des coordonnées de IJK. Ces fonctions et leurs intégrales sur MONI peuvent être estimées analytiquement en utilisant (10.3.5) et (10.3.11). Ce terme et ses équivalents dans tous les triangles dont I est le sommet seront ajoutés au second membre de (10.3.7).

En principe, on peut également utiliser les approximations explicites, implicites, de Crank-Nicholson et de Gear pour résoudre l'équation conforme qui en résulte. Cependant, il ne servirait à rien d'utiliser l'approximation explicite, car on ne peut plus résoudre explicitement pour $H_i^{t+\Delta t}$ dans le premier membre comme dans (10.2.12). Chaque équation comprendra maintenant plusieurs inconnues au temps $t + \Delta t$: $H_i^{t+\Delta t}, H_j^{t+\Delta t}, H_k^{t+\Delta t}$, etc., et la solution exige, par conséquent, l'inversion de la matrice du système à chaque pas de temps, tout comme dans l'approximation implicite.

Etant donné que les approximations implicites ou de Crank-Nicholson (avec $\alpha > 0.5$) sont inconditionnellement stables et n'exigent pas, dans ce cas, davantage de temps ordinateur, on les préfère systématiquement à l'approximation explicite dans les éléments finis conformes.

10.3.2. Éléments finis linéaires isoparamétriques avec l'approximation de Galerkin

a) *Élément de base*

En deux dimensions, l'élément de base est un quadrilatère IJKL (Fig. 10.14). Pour les éléments non linéaires, les côtés de cet élément pourraient représenter des polynômes d'un degré supérieur, par exemple des paraboles, mais nous limiterons cet exposé aux éléments linéaires dont les côtés sont des droites.

En règle générale, on définit une transformation linéaire du système de coordonnées (x, y) pour chaque élément, de manière à ce que IJKL devienne un carré $ijkl$ dans le nouveau système (ξ, η) (Fig. 10.14).

Cette transformation est définie par:

$$\begin{aligned} x &= N_i(\xi, \eta)x_I + N_j(\xi, \eta)x_J + N_k(\xi, \eta)x_K + N_l(\xi, \eta)x_L \\ y &= N_i(\xi, \eta)y_I + N_j(\xi, \eta)y_J + N_k(\xi, \eta)y_K + N_l(\xi, \eta)y_L \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

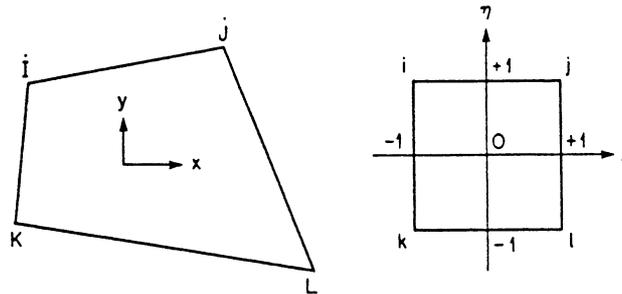


Figure 10.14. Élément quadrilatère et transformation linéaire dans un carré.

Dans le système (ξ, η) , les fonctions N_i sont des fonctions bilinéaires, appelées fonctions chapeau:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (10.3.13)$$

Par exemple, pour le sommet $i(\xi_i = -1, \eta_i = +1)$;

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta)$$

Cette fonction N_i est égale à 1 dans i et à 0 dans j, k et l . Elle varie linéairement avec η et ξ le long des côtés du carré et bilinéairement à l'intérieur du carré. Dans la figure 10.15, nous avons dessiné la ligne de contour d'une fonction chapeau autour d'un nœud i dans le plan (ξ, η) . Le nom "chapeau" vient de la forme de cette fonction.

Quand (ξ, η) décrit le carré $ijkl$, il est facile de voir que (x, y) de (10.3.12) décrit IJKL.

b) *Fonctions de base*

Sur l'élément IJKL, l'inconnue $h(x, y)$ (ici, la charge) sera approximé par la somme de quatre fonctions de base bilinéaires:

$$h(x, y) = H_I N_I(x, y) + H_J N_J(x, y) + H_K N_K(x, y) + H_L N_L(x, y) \quad (10.3.14)$$

où H_I, \dots, H_L seront les valeurs de la charge aux nœuds I, \dots, L (les inconnues du problème) et les fonctions de base bilinéaires N_I, \dots, N_L seront de nouveau les fonctions chapeau définies ci-dessus, par exemple, $N_I(I) = 1, N_I(J) = N_I(K) = N_I(L) = 0$, et N_I varie bilinéairement dans x et y . Plus précisément,

$$N_I(x, y) = N_i(\xi, \eta) \quad (10.3.15)$$

avec (x, y) donnés par (10.3.12) à partir de (ξ, η) et N_i défini dans (10.3.13).

c) Equation intégrale

Au lieu d'intégrer l'équation de l'écoulement exactement sur un domaine D_i autour de chaque nœud I , comme nous l'avons fait pour les différences finies intégrées ou pour les éléments finis triangulaires, la formulation de Galerkin exige l'intégration de cette équation avec un facteur de pondération. En régime permanent, et en supposant que x et y sont les directions principales d'anisotropie, nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - q = 0$$

puis

$$\int_{D_i} \int W_i(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - q \right] dx dy = 0 \quad (10.3.16)$$

où W_i est une fonction de pondération. Autrement dit, l'équation de l'écoulement sera vérifiée "en moyenne" sur D_i , mais en tant que moyenne pondérée. On peut utiliser plusieurs types de fonctions de pondération, mais dans la formulation de Galerkin, les fonctions de pondération W_i sont encore les mêmes fonctions chapeau que celles utilisées comme fonction de base, et le domaine d'intégration D_i est composé des quatre quadrilatères entourant chaque nœud. On peut écrire des équations telles que (10.3.16) pour chaque nœud du maillage où la charge h n'est pas imposée.

Remarquez qu'avec la formulation de Galerkin, D_i n'est plus un polygone sur lequel le bilan de masse est vérifié. On peut, cependant, démontrer que 1) le bilan de masse est globalement vérifié pour la totalité du domaine, et 2) autour de chaque nœud, on peut trouver un domaine compris dans D_i pour lequel le bilan de masse est vérifié. Ces domaines entourant chaque nœud départagent le domaine total, mais leur forme dépend en fait de la valeur de la charge aux nœuds (Goblet, 1981) et ne peut être définie *a priori*.

d) Calcul de l'intégrale

Nous pouvons intégrer (10.3.16) par parties. En substituant N_I à W_I , nous trouvons:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} N_I(x, y) \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T_y \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) ds - \int_{D_i} \int \left(\frac{\partial N_I}{\partial x} T_x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy \\ = \int_{D_i} \int q N_I dx dy \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

où n_x et n_y sont les cosinus de direction de la normale extérieure de Γ_i . Toutefois, par définition de la fonction chapeau, $N_I \equiv 0$ sur Γ_i , de façon à ce que l'intégrale de contour s'annule pour tous les nœuds à l'intérieur du domaine. Nous verrons plus tard comment traiter les conditions aux limites. Maintenant, il faut calculer séparément les intégrales sur D_i pour chaque quadrilatère dont I est le nœud. Ensuite, nous utiliserons (10.3.14) pour la charge dans chaque quadrilatère. Par exemple, pour IJKL, le premier membre de (10.3.17) deviendrait:

$$\begin{aligned} -H_I \iint_{IJKL} \left[\frac{\partial N_I}{\partial x} T_x \frac{\partial N_I}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} T_y \frac{\partial N_I}{\partial y} \right] dx dy \\ -H_J \iint_{IJKL} \left[\frac{\partial N_I}{\partial x} T_x \frac{\partial N_J}{\partial x} + \frac{\partial N_I}{\partial y} T_y \frac{\partial N_J}{\partial y} \right] dx dy \\ -H_K(\text{similar term}) - H_L(\text{similar term}) \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

Enfin, (10.3.17) prendra la forme:

$$\sim -C_I H_I - C_J H_J - \dots (\text{généralement 9 termes}) = Q_I \quad (10.3.19)$$

où Q_I est l'intégrale pondérée du terme source sur D_i . Notez que C_I est la somme des intégrales données dans (10.3.18) pour les quatre quadrilatères tels que IJKL. Il y a plusieurs méthodes pour calculer ces intégrales, qui ne sont que des fonctions des coordonnées et des transmissivités directionnelles.

- *Intégration analytique*: Il est alors utile d'intégrer dans le système de coordonnées (ξ, η) . Nous ferons l'hypothèse que T_x et T_y sont constants sur chacun des quadrilatères. Il nous faut donc estimer des intégrales telles que:

$$\iint_{IJKL} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \det(J) d\xi d\eta$$

où $\det(J)$ est le déterminant de la matrice jacobienne du changement de coordonnées de (x, y) à (ξ, η) :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Ces dérivées

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

peuvent être calculées explicitement à partir de (10.3.12) et (10.3.13) et par inversion de la matrice de Jacob.

Intégration numérique: Nous utiliserons une intégration gaussienne de la forme:

$$\iint_{ijkl} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{n=1}^m \lambda_n G(M_n)$$

Les points M_n et les poids λ_n sont les points de Gauss et les poids de $ijkl$, et ils sont connus. Le nombre de points qu'il faut utiliser est fonction du degré de l'expression polynômiale G : avec m points, l'intégration est exacte pour une expression polynômiale de degré $2m - 1$. En général, on utilise quatre points (Zienkiewicz, 1977; Dhatt et Touzot, 1981).

Pour quatre points, on peut prendre:

$$(\lambda, \xi, \eta) = (1, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$$

ou, pour sept points:

$$(\lambda, \xi, \eta) = \left[\frac{8}{7}, 0, 0 \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{20}{63}, 0, \pm \sqrt{\frac{14}{15}} \right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{20}{36}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \right]$$

Anisotropie: Si les directions principales d'anisotropie (x, y) du tenseur de transmissivité \mathbf{T} à l'intérieur de IJKL ne forment pas le vrai système de coordonnées (X, Y) du domaine global, il faut d'abord transformer le système (X, Y) localement par une rotation afin d'obtenir (x, y) , exactement comme pour les éléments triangulaires (cf. § 10.3.8).

Éléments mixtes: Il est également possible d'utiliser simultanément des éléments triangulaires linéaires et des quadrilatères bilinéaires dans l'approximation de Galerkin, ce qui rend le maillage plus flexible. Les fonctions chapeau qu'il faut utiliser pour un triangle sont alors $(1 - \xi - \eta)$, (ξ) et (η) si les trois pointes du triangle sont situées dans $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ dans le diagramme de (ξ, η) (Fig. 10.16).

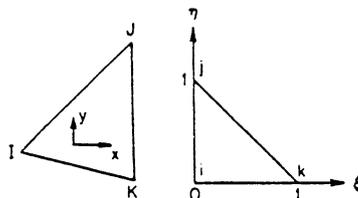


Figure 10.16. Triangle dans le système (ξ, η) .

Si l'on effectue une intégration numérique sur le triangle, les points et les poids de Gauss sont, pour (λ, ξ, η) :

trois points:

$$\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 0\right]$$

quatre points:

$$\left[-\frac{27}{96}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]; \left[\frac{25}{96}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]; \left[\frac{25}{96}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right]; \left[\frac{25}{96}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$$

Conditions aux limites: Nous avons vu que, pour une limite à charge imposée, la charge sera connue dans les nœuds qui se trouvent sur cette limite, et que l'on n'écrira pas d'équations pour ceux-ci. Pour une limite à flux imposé, l'intégrale de contour de (10.3.17) n'est pas nulle, mais on peut facilement la calculer si l'on connaît le flux sur la limite et la fonction chapeau N_1 . Ensuite, ce terme étant connu, il peut être transféré au second membre de (10.3.19).

Régime transitoire: En régime transitoire, on ajoute le terme $S\partial h/\partial t$ à l'intérieur des crochets de (10.3.16). Ensuite, il faut estimer dans (10.3.17) ou dans (10.3.19) des termes tels que:

$$\int_D \int N_1 S \frac{\partial h}{\partial t} dx dy \quad (10.3.20)$$

Ceci peut se faire de deux façons, comme pour les éléments triangulaires. On peut soit utiliser la formulation conforme, à savoir substituer $\sum_I H_I N_I$ (10.3.14) à h dans (10.3.20), et ensuite estimer les intégrales de $N_1 S$ sur chacun des quadrilatères, soit utiliser la formulation concentrée, c'est-à-dire supposer que $\partial H_I/\partial t$ peut être pris pour représenter $\partial h/\partial t$ à l'intérieur de l'intégrale (voir Neuman, 1975b).

Cette approximation concentrée a l'avantage de permettre l'emploi de l'expression explicite. Elle est cependant moins exacte que la formulation conforme.

Assemblage de la matrice: Au lieu de calculer successivement, pour chaque nœud I , les coefficients C_i, C_j, \dots de chaque ligne de la matrice globale du système (10.3.11) ou (10.3.19), il est plus efficace de déterminer au préalable tous ces coefficients pour chaque élément du maillage en calculant successivement, pour chacun des éléments, les intégrales données dans (10.3.18). Ceci étant fait, les coefficients pour chaque nœud I (chaque ligne de la matrice) sont calculés en ajoutant le terme approprié de chaque élément dont le sommet est I . Ceci s'appelle l'assemblage de la matrice du système.

10.3.3. Eléments d'ordre supérieur

A la place des fonctions de base linéaires ou bilinéaires, on peut se servir de fonctions d'ordre supérieur en éléments finis afin d'augmenter la précision et/ou diminuer la taille des mailles. Il existe, au moins, deux manières de le faire:

1) On peut utiliser, comme fonctions de base sur les éléments, des polynômes d'ordre supérieur (par exemple, des carrés ou des cubes), qui accroîtront le nombre d'inconnues sur chaque élément. On aura donc davantage de nœuds sur chaque élément (par exemple, neuf nœuds sur un quadrilatère - les quatre coins, quatre nœuds au milieu de chaque côté et un nœud au centre pour les fonctions quadratiques - ou seize nœuds pour une fonction cubique). Toutefois, avec de tels éléments, la fonction d'interpolation n'a toujours pas de dérivée continue d'un élément à l'autre.

2) Il est possible d'utiliser des éléments hermitiens. Ainsi, on n'augmente pas le nombre de nœuds par élément, mais on considère, en revanche, que h et ses dérivées aux nœuds sont des inconnues. Si nous prenons des polynômes cubiques d'Hermite, h est continu, $\partial h/\partial n$ est toujours discontinu, mais $\partial h/\partial x$ et $\partial h/\partial y$ sont identiques à un nœud dans chaque quadrilatère; si les éléments sont rectangulaires, $\partial h/\partial x$ et $\partial h/\partial y$ sont continus. Si nous choisissons des polynômes d'Hermite d'ordre supérieur, nous pouvons obtenir que les dérivées du premier et deuxième ordre soient continues. Ceci s'est avéré très efficace pour résoudre l'équation de transfert (cf. § 10.5.3); voir Van Genuchten (1977).

Toutes ces techniques sont décrites par Pinder et Gray (1977).

FORMULES PERMETTANT D'ESTIMER L'EVAPORATION POTENTIELLE

1. Formule de Thornthwaite

L'évapotranspiration potentielle (ETP), mensuelle ou décadaire est donnée par:

$$ETP = 16 \left(\frac{10\Theta}{I} \right)^a \cdot F(\lambda)$$

ETP en millimètres

Θ = température moyenne mesurée sous abri de la période considérée, °C, ETP en millimètres/mois

$a = 6,75 \cdot 10^{-7} I^3 - 7,71 \cdot 10^{-5} I^2 + 0,49239$

I = indice thermique annuel, somme de douze indices thermiques mensuels i

$i = \left(\frac{\Theta}{5} \right)^{1,514}$

$F(\lambda)$ = coefficient de correction, fonction de la latitude et du mois, donné par la table, page .

$$+ 1,79 \times 10^{-2} \pm$$

2. Formules de Turc

Turc préconise des formules différentes selon que l'humidité relative moyenne est supérieure ou inférieure à 50%:

- Si $U_m > 50\%$ (cas habituel des régions tempérées)

$$ETP_{\text{mm}/10 \text{ jours}} = 0,13 \frac{\Theta}{\Theta + 15} (R_g + 50)$$

- Si $U_m < 50\%$

$$ETP_{\text{mm}/10 \text{ jours}} = 0,13 \frac{\Theta}{\Theta + 15} (R_g + 50) \left[1 + \frac{50 - U_m}{70} \right]$$

Θ = température moyenne, mesurée sous abri, de la période considérée (°C)

R_g = radiation solaire globale

$$R_g \simeq I_{g_a} \left(0,18 + 0,62 \frac{h}{H} \right)$$

h = durée réelle d'insolation

H = durée maximale d'insolation possible (durée astronomique du jour)

I_{g_a} = radiation solaire directe en l'absence d'atmosphère I_{g_a} et H sont tabulés en fonction de la latitude et de la date, page .

COEFFICIENT DE CORRECTION $F(\lambda)$ EN FONCTION DE LA LATITUDE ET DU MOIS
Formule de Thornthwaite, d'après Brochet et Gerbier (1968)

Lat. N	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
0	1.04	.94	1.04	1.01	1.04	1.01	1.04	1.04	1.01	1.04	1.01	1.04
5	1.02	.93	1.03	1.02	1.06	1.03	1.06	1.05	1.01	1.03	.99	1.02
10	1.00	.91	1.03	1.03	1.08	1.06	1.08	1.07	1.02	1.02	.98	.99
15	.97	.91	1.03	1.04	1.11	1.08	1.12	1.08	1.02	1.01	.95	.97
20	.95	.90	1.03	1.05	1.13	1.11	1.14	1.11	1.02	1.00	.93	.94
25	.93	.89	1.03	1.06	1.15	1.14	1.17	1.12	1.02	.99	.91	.91
26	.92	.88	1.03	1.06	1.15	1.15	1.17	1.12	1.02	.99	.91	.91
27	.92	.88	1.03	1.07	1.16	1.15	1.18	1.13	1.02	.99	.90	.90
28	.91	.88	1.03	1.07	1.16	1.16	1.18	1.13	1.02	.98	.90	.90
29	.91	.87	1.03	1.07	1.17	1.16	1.19	1.13	1.03	.98	.90	.89
30	.90	.87	1.03	1.08	1.18	1.17	1.20	1.14	1.03	.98	.89	.88
31	.90	.87	1.03	1.08	1.18	1.18	1.20	1.14	1.03	.98	.89	.88
32	.89	.86	1.03	1.08	1.19	1.19	1.21	1.15	1.03	.98	.88	.87
33	.88	.86	1.03	1.09	1.19	1.20	1.22	1.15	1.03	.97	.88	.86
34	.88	.85	1.03	1.09	1.20	1.20	1.22	1.16	1.03	.97	.87	.86
35	.87	.85	1.03	1.09	1.21	1.21	1.23	1.16	1.03	.97	.86	.85
36	.87	.85	1.03	1.10	1.21	1.22	1.24	1.16	1.03	.97	.86	.84
37	.86	.84	1.03	1.10	1.22	1.23	1.25	1.17	1.03	.97	.85	.83
38	.85	.84	1.03	1.10	1.23	1.24	1.25	1.17	1.04	.96	.84	.83
39	.85	.84	1.03	1.11	1.23	1.24	1.26	1.18	1.04	.96	.84	.82
40	.84	.83	1.03	1.11	1.24	1.25	1.27	1.18	1.04	.96	.83	.81
41	.83	.83	1.03	1.11	1.25	1.26	1.27	1.19	1.04	.96	.82	.80
42	.82	.83	1.03	1.12	1.26	1.27	1.28	1.19	1.04	.95	.82	.79
43	.81	.82	1.02	1.12	1.26	1.28	1.29	1.20	1.04	.95	.81	.77
44	.81	.82	1.02	1.13	1.27	1.29	1.30	1.20	1.04	.95	.80	.76
45	.80	.81	1.02	1.13	1.28	1.29	1.31	1.21	1.04	.94	.79	.75
46	.79	.81	1.02	1.13	1.29	1.31	1.32	1.22	1.04	.94	.79	.74
47	.77	.80	1.02	1.14	1.30	1.32	1.33	1.22	1.04	.93	.78	.73
48	.76	.80	1.02	1.14	1.31	1.33	1.34	1.23	1.05	.93	.77	.72
49	.75	.79	1.02	1.14	1.32	1.34	1.35	1.24	1.05	.93	.76	.71
50	.74	.78	1.02	1.15	1.33	1.36	1.37	1.25	1.06	.92	.76	.70
Lat. S												
5	1.06	.95	1.04	1.00	1.02	.99	1.02	1.03	1.00	1.05	1.03	1.06
10	1.08	.97	1.05	.99	1.01	.96	1.00	1.01	1.00	1.06	1.05	1.10
15	1.12	.98	1.05	.98	.98	.94	.97	1.00	1.00	1.07	1.07	1.12
20	1.14	1.00	1.05	.97	.96	.91	.95	.99	1.00	1.08	1.09	1.15
25	1.17	1.01	1.05	.96	.94	.88	.93	.98	1.00	1.10	1.11	1.18
30	1.20	1.03	1.06	.95	.92	.85	.90	.96	1.00	1.12	1.14	1.21
35	1.23	1.04	1.06	.94	.89	.82	.87	.94	1.00	1.13	1.17	1.25
40	1.27	1.06	1.07	.93	.86	.78	.84	.92	1.00	1.15	1.20	1.29
42	1.28	1.07	1.07	.92	.85	.76	.82	.92	1.00	1.16	1.22	1.31
44	1.30	1.08	1.07	.92	.83	.74	.81	.91	.99	1.17	1.23	1.33
46	1.32	1.10	1.07	.91	.82	.72	.79	.90	.99	1.17	1.25	1.35
48	1.34	1.11	1.08	.90	.80	.70	.76	.89	.99	1.18	1.27	1.37
50	1.37	1.12	1.08	.89	.77	.67	.74	.88	.99	1.19	1.29	1.41

3. Formule de Penman

$$E = \frac{1}{L} \frac{R_n \frac{F'\theta}{\gamma}}{1 + \frac{F'\theta}{\gamma}} + E_a \frac{1}{1 + \frac{F'\theta}{\gamma}}$$

- L = chaleur latente d'évaporation de l'eau (59 cal/cm² pour 1 mm d'eau équivalente)
 R_n = rayonnement net, évalué par la formule:
 $R_n = I_{g_a}(1 - a)(0,18 + 0,62 \frac{h}{H}) - \sigma \theta^4(0,56 - 0,08\sqrt{e})(0,10 + 0,9 \frac{h}{H})$
 E_a = pouvoir évaporant de l'air = $(e_w - e)0.26(1 + 0.4V)$
 γ = constance psychrométrique ($\gamma \cong 0,65$)
 a = albedo de la surface évaporante (en général, $a = 0,25$)
 I_{g_a} = radiation solaire directe en l'absence d'atmosphère
 h = durée réelle d'insolation
 H = durée astronomique du jour
 θ = température de l'air sous abri (°K)
 σ = $1,19 \cdot 10^7$ cal/cm².jour.°K
 e = tension de la vapeur d'eau mesurée sous abri, en mb
 e_w = tension maximale de la vapeur d'eau pour la température θ en mb
 V = vitesse moyenne du vent mesurée à 10 m au-dessus de la surface évaporante (m/s)
 $F'\theta$ = pente de la courbe de tension maximale de la vapeur d'eau

**VALEURS MENSUELLES DE I_g , EN PETITES CALORIES PAR
CM² DE SURFACE HORIZONTALE ET PAR JOUR.**

(d'après Brochet et Gerbier, 1968)

Latitude Nord	30°	40°	50°	60°
Janvier	508	364	222	87,5
Février	624	495	360	215
Mars	764	673	562	432
Avril	880	833	764	676
Mai	950	944	920	880
Juin	972	985	983	970
Juillet	955	958	938	908
Août	891	858	800	728
Septembre	788	710	607	487
Octobre	658	536	404	262
Novembre	528	390	246	111
Décembre	469	323	180	55,5

**DUREE ASTRONOMIQUE DU JOUR H
VALEURS MENSUELLES MOYENNES EN HEURES PAR JOUR**

(d'après Brochet et Gerbier, 1968)

Latitude Nord	30°	40°	50°	60°
Janvier (31)	10.45	9.71	8.58	6.78
Février (28 1/4)	11.09	10.64	10.07	9.11
Mars (31)	12.00	11.96	11.90	11.81
Avril (30)	12.90	13.26	13.77	14.61
Mai (31)	13.71	14.39	15.46	17.18
Juin (30)	14.07	14.96	16.33	18.73
Juillet (31)	13.85	14.68	15.86	17.97
Août (31)	13.21	13.72	14.49	15.58
Septembre (30)	12.36	12.46	12.63	12.89
Octobre (31)	11.45	11.15	10.77	10.14
Novembre (30)	10.67	10.00	9.08	7.58
Décembre (31)	10.23	9.39	8.15	6.30

GRANDEURS USUELLES, VALEURS ET UNITES

1. UNITES DE MESURE DU SYSTEME INTERNATIONAL D'UNITES (SI)

1.1. Unités de base

Elles sont au nombre de 7

- le mètre, unité de longueur, m
- le kilogramme, unité de masse, kg
- la seconde, unité de temps, s
- l'ampère, unité d'intensité de courant électrique, A
- le kelvin, unité de température, K
- le candela, unité d'intensité lumineuse, cd
- le mole, unité de quantité de matière, mol

Les préfixes SI sont les suivants:

Préfixe	Symbole	Facteur par lequel l'unité est multipliée	
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	= 10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	= 10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	= 10^{12}
giga	G	1 000 000 000	= 10^9
mega	M	1 000 000	= 10^6
kilo	k	1 000	= 10^3
hecto	h	100	= 10^2
deca	da	10	= 10
deci	d	0,1	= 10^{-1}
centi	c	0,01	= 10^{-2}
milli	m	0,001	= 10^{-3}
micron	μ	0,000 001	= 10^{-6}
nano	n	0,000 000 001	= 10^{-9}
pico	p	0 000 000 000 001	= 10^{-12}
femto	f	0 000 000 000 000 001	= 10^{-15}
atto	a	0 000 000 000 000 000 001	= 10^{-18}

Ces préfixes s'accrochent aux symboles de base. Exemple: kA, kilo ampère.

1.2. Unités géométriques

Longueur: le m et ses dérivés (km, etc ...)
 On utilise le micron, μ : 10^{-6} m
 l'Ångström, Å: 10^{-10}
 Unités anglo-saxonnes:

	le pied, ft: 0,3048 m le mile: 1,609 10 ³ m
<i>Aire:</i>	le m ² et ses dérivés On utilise aussi l'hectare, ha: 10.000 m ² l'are, a: 100 m ² Unités anglo-saxonnes: ft ² : 9,29 10 ² m ² acre: 4,047 10 ³ m ²
<i>Volume:</i>	le m ³ et ses dérivés Le litre (0,001 m ³) ne doit pas être employé au lieu du dm ³ quand il s'agit de résultats de précision. Unités anglo-saxonnes: ft ³ : 2,832 10 ⁻² m ³ US gal: 3,785 10 ⁻³ m ³ UK gal: 4,546 10 ⁻³ m ³
<i>Angle plan:</i>	le radian (rad) Le degré vaut $\frac{\pi}{180}$ rad Le grade vaut $\frac{\pi}{200}$ rad
<i>Angle solide:</i>	le stéradian (sr). C'est l'angle d'un solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

1.3. Unités de masse et de matière

<i>Masse:</i>	le kilogramme (kg). La tonne, t, vaut 1.000 kg Le quintal, q, vaut 100 kg Unités anglo-saxonnes: livre, lb: 0,4536 kg ton (long), tn.l: 1,016 10 ³ kg ton (short), tn.s: 0,907 10 ³ kg
<i>Masse volumique:</i>	le kg/m ³
<i>Quantité de matière:</i>	la mole, mol: c'est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12 (la nature des entités élémentaires doit être spécifiée).
<i>Concentration:</i>	la mole par mètre cube, mol/m ³ On utilise aussi des concentrations volumiques en kg/m ³ et des concentrations massiques en kg/kg.

1.4. Unités mécaniques

<i>Vitesse:</i>	m/s. En navigation, 1 nœud= 0,514444 m/s
<i>Accélération:</i>	m/s ² . L'accélération de la pesanteur est g = 9,80665 m/s ²
<i>Vitesse angulaire:</i>	rad/s
<i>Fréquence:</i>	le hertz, Hz, phénomène dont la période est de 1 seconde.

<i>Force:</i>	le newton, N. C'est la force qui communique à un corps ayant masse de 1 kg une accélération de 1 m/s^2 . Dimension: $[MLT^{-2}]$ La dyne vaut 10^{-5} newton. La gravité engendre, sur une masse de 1 kg, une force de 9,80665 newton.
<i>Moment d'une force:</i>	mètre.newton, ou newton.mètre, N.m.
<i>Contrainte et pression:</i>	le pascal, Pa, engendré par une force de 1 newton par m^2 Dimension: $[ML^{-1}T^{-2}]$ On utilise plus fréquemment le mégapascal, MPa, soit 10^6 Pa. Le bar: 10^5 Pa Le millibar: 10^2 Pa $1 \text{ kg/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4$ Pa
	Il faut proscrire l'atmosphère standard = $1,0133 \text{ bar} = 1,0133 \cdot 10^5$ Pa le mm de mercure = $1,33322 \cdot 10^2$ Pa le m d'eau à $4^\circ\text{C} = 9,80638 \cdot 10^3$ Pa la dyne/cm ² = 0,1 Pa le psi (pound per square inch, unité anglo-saxonne) = $6,895 \cdot 10^3$ Pa
<i>Viscosité dynamique μ:</i>	le pascal-seconde, Pa.s Dimension $[ML^{-1}T^{-1}]$ La poise vaut 0,1 Pa.s
<i>Viscosité cinématique μ/ρ:</i>	le m^2/s Le stokes vaut $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

1.5 Unités énergétiques

<i>Travail ou quantité de chaleur:</i>	le joule, J C'est le travail d'une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 m. Dimension: $[ML^2T^{-2}]$ L'erg vaut 10^{-7} J Le kW.h vaut $3,6 \cdot 10^6$ J La calorie (petite) = 4,185 J, c'est la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 g d'eau de 1°C La kilocalorie (ou grande calorie) = $4,185 \cdot 10^3$ J La thermie (10^3 kilocalories) = $4,185 \cdot 10^6$ J La BTU (British Thermal Unit) = $1,055 \cdot 10^3$ J
<i>Puissance:</i>	le watt, W, soit 1 J/s. Dimension: $[ML^2T^{-3}]$ $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$; $\text{MW} = 10^6 \text{ W}$; $\text{GW} = 10^9 \text{ W}$ Le cheval-vapeur = 736 W L'erg/s = 10^{-7} W La BTU/s = $1,055 \cdot 10^3$ W
<i>Température thermodynamique:</i>	le kelvin, K Le degré Celsius, $^\circ\text{C}$ a comme origine 273,15 K
<i>Conductivité thermique λ:</i>	le W/m K, Dimension $[MLT^{-3}K^{-1}]$ Le kcal/sm $^\circ\text{C} = 4,18 \cdot 10^3$ W/m K
<i>Capacité calorifique massique</i>	(chaleur massique), c: Le J/kg K, dimension $[L^2T^2K^{-1}]$

	Le kcal/kg°C = 4,18 10 ³ J/m ³ K
<i>Capacité calorifique volumique</i>	(chaleur volumique ou spécifique), ρc : Le J/m ³ K, dimension [ML ⁻¹ T ⁻² K ⁻¹] Le kcal/m ³ °C = 4,18 10 ³ J/kg K
<i>Diffusivité thermique</i> $\lambda/\rho c$:	le m ² /s, dimension [L ² T ⁻¹]

1.6. Unités électriques

<i>Intensité de courant électrique:</i>	l'ampère, A.
<i>Quantité d'électricité:</i>	le coulomb, C. C'est la quantité d'électricité transportée en une seconde par un courant d'1 ampère.
<i>Différence de potentiel:</i>	le volt, V. C'est la différence de potentiel qui dissipe une puissance de 1 W pour un courant constant d'1 A.
<i>Résistance électrique:</i>	l'ohm, Ω . C'est la résistance d'un conducteur où circule 1 A sous une d de p de 1 V. Le siemens, S, est la conductance (inverse de la résistance) d'un conducteur de résistance 1 Ω .
<i>Capacité électrique:</i>	le farad, F. C'est la capacité d'un condensateur qui se charge de 1C sous une d de p de 1 V.
<i>Inductance électrique:</i>	le henry, H. C'est l'inductance électrique d'un circuit fermé dans lequel une différence de potentiel de 1 V est produite, lorsque le courant électrique qui parcourt le circuit varie uniformément à raison de 1 A/s.
<i>Flux magnétique:</i>	le weber, Wb. Il produit une d de p de 1 V à travers un circuit d'une seule spire si on l'amène à zéro en 1 seconde par décroissance uniforme.
<i>Induction magnétique:</i>	le telsa, T. C'est l'induction magnétique uniforme qui, répartie normalement sur une surface plane de 1 m ² , produit à travers cette surface un flux magnétique total de 1 Wb.
<i>Force magnétomotrice:</i>	l'ampère, A. C'est la force magnétomotrice correspondant à un courant de 1 A dans une seule spire.
<i>Intensité du champ magnétique:</i>	Ampère par mètre, A/m. C'est l'intensité du champ magnétique créé au centre d'un circuit de 1 m de diamètre par le passage dans le circuit d'un courant de 1 A, le circuit étant constitué par un fil conducteur de section négligeable.

1.7. Unités radiologiques

<i>Activité radionucléaire:</i>	le becquerel, Bq. Il correspond à une désintégration par seconde d'un corps radioactif. Le curie, Ci, vaut 37 GBq (gigabecquerel).
---------------------------------	--

Quantité de rayonnement X ou γ : le coulomb par kilogramme, C/kg.
 C'est la quantité de rayonnement X ou γ telle que l'émission corpusculaire qui lui est associée dans 1 kg d'air produit dans l'air des ions transportant une quantité d'électricité (de l'un ou l'autre signe) égale à 1 coulomb.
 Le roentgen vaut $2,58 \cdot 10^{-4}$ C/kg.

Dose absorbée de rayonnement ionisant:
 le gray, Gy.
 Il correspond à une énergie absorbée égale à 1 J/kg.
 Le rad vaut 0,01 Gy.

Dose biologique efficace: le sievert, Sv.
 C'est la dose engendrée par un rayonnement ionisant dont l'effet est égal à celui d'un rayonnement X ou γ de 200 à 250 kV.
 Le rad vaut 0,01 Sv.

1.8. Unités optiques

Intensité lumineuse: le candela, cd.
 C'est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540 terahertz, et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 Watt par stéradian.

Luminance: Candela par mètre carré, cd/m². C'est la luminance d'une source de 1 m² de surface, émission dont l'intensité lumineuse est de 1 cd.
 Le stilb, sb, vaut 10⁴ cd/m².

Flux lumineux: le lumen, lm.
 C'est le flux lumineux émis dans l'angle solide d'1 stéradian par une source ponctuelle uniforme placée au sommet de l'angle solide et ayant une intensité lumineuse de 1 cd.

Eclairement: le lux, lx.
 C'est l'éclairement d'une surface qui reçoit normalement, d'une manière uniformément répartie, le flux de 1 lm/m².

Vergence des systèmes optiques: la dioptrie, δ .
 C'est celle d'un système optique dont la distance focale est de 1 m dans un milieu dont l'indice de réfraction est de 1.

2. VALEUR DES GRANDEURS USUELLES EN HYDROGEOLOGIE

2.1. Propriétés de l'eau pure

Température, °C	Poids spécifique, kN/m ³ $\gamma = \lambda g$	Masse volumique, kg/m ³ λ	Viscosité dynamique $\mu \times 10^3$, Pa.s	Viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho \times 10^6$, m ² /s	Chaleur de vaporisation J/G	Pression de vapeur absolue, k Pa	Compressibilité $\lambda \times 10^{-10}$, Pa	Module d'Young (élasticité) $\times 10^{-6}$, k Pa	Coefficient d'expansion thermique volumique $\alpha = d(\text{Log } \rho) / dT \times 10^{-6}$, °C ⁻¹	Chaleur spécifique c J/Kg °C	Conductivité thermique λ , W/mC	Diffusivité thermique $\lambda / \rho c \times 10^8$, m ² /s
0	9.805	999.8	1.781	1.785	2500.3	0.61	5.098	2.02	-68	4217.4	0.564	13.4
5	9.807	1000.0	1.518	1.519	2488.6	0.87	4.928	2.06	16			
10	9.804	999.7	1.307	1.306	2476.9	1.23	4.789	2.10	88	4191.9	0.578	13.8
15	9.798	999.1	1.139	1.139	2465.1	1.70	4.678	2.15	151			
20	9.789	998.2	1.002	1.003	2453.0	2.34	4.591	2.18	207	4181.6	0.598	14.2
25	9.777	997.0	0.890	0.893	2441.3	3.17	4.524	2.22	257			
30	9.764	995.7	0.798	0.800	2429.6	4.24	4.475	2.25	303	4178.2	0.607	14.6
40	9.730	992.2	0.653	0.658	2405.7	7.38	4.422	2.28	385	4178.3	0.628	15.2
50	9.689	988.0	0.547	0.553	2381.8	12.33	4.417	2.29	458	4180.4		
60	9.642	983.2	0.466	0.474	2357.6	19.92	4.450	2.28	523	4184.1	0.652	15.8
70	9.589	977.8	0.404	0.413	2333.3	31.16	4.515	2.25	584	4189.3		
80	9.530	971.8	0.354	0.364	2308.2	47.34	4.610	2.20	641	4196.1	0.669	16.4
90	9.466	965.3	0.315	0.326	2282.6	70.10	4.734	2.14	696	4204.8		
100	9.399	958.4	0.282	0.294	2256.7	101.33	4.890	2.07	750	4215.7	0.671	16.6

2.2. Propriétés de la glace à -5°C

Masse volumique $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$; chaleur latente de fusion: 334.10^3 J/kg
 Chaleur spécifique $c = 2075 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$; conductivité thermique
 $\lambda: 2.3 \text{ W/m}^\circ\text{C}$.

2.3. Propriétés de l'eau salée (NaCl)

Eau de mer à 34‰

Température °C	Masse volumique $\rho \text{ kg/m}^3$	Chaleur spécifique $c \text{ J/kg}^\circ\text{C}$	Viscosité cinématique $\nu, 10^6 \nu \text{ m}^2/\text{s}$
0	1027.32	3989	1.8
5	1026.91	3992	1.6
10	1026.19	3995	1.4
15	1025.22	3997	1.2
20	1024.02	4000	1.1
25	1022.61	4002	0.94

Concentration en NaCl par kg/km ³	Masse de NaCl par masse de solution à 20°C %	Masse volumique de la solution à 15°C.kg/m ³	idem à 20°C	Chaleur spécifique à 20°C.J/kg°C
0	0	999.13	998.23	4182
10	0.995	1006.30	1005.30	4127
20	1.976	1013.39	1012.29	4075
30	2.943	1020.41	1019.22	4024
40	3.898	1027.35	1026.07	3975
50	4.841	1034.25	1032.88	3929
60	5.772	1041.05	1039.60	3884
70	6.690	1047.83	1046.32	3841